

UNIVERSITY  
OF MICHIGAN

FEB 1952

PHYSICS  
LIBRARY

# ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren  
Fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,  
G. und E. Wiedemann, P. Drude,  
W. Wien, M. Planck, E. Grüneisen

Der ganzen Reihe 444. Band

Kuratorium:

W. GERLACH, CHR. GERTHSEN, F. HUND, W. KOSSEL,  
M. v. LAUE, W. MEISSNER, R. W. POHL, R. ROMPE,  
R. SEELIGER, A. SOMMERFELD †, W. WEIZEL

Herausgegeben von

F. MÖGLICH  
Berlin



JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

## Inhalt

|   | Seite |
|---|-------|
| J. Picht, Potsdam-Griebnitzsee, Potsdam-Sanssouci: Beitrag zur Theorie der optischen Schallanalyse. II. (Mit 7 Abbildungen) .....                         | 381   |
| W. Kofink, Karlsruhe: Über die zwei Strömungsfelder hinter einem Gabelstoß  | 401   |
| K. F. Novobatzky, Budapest: Das klassische Modell der Quantentheorie .....  | 406   |
| H. Benda, Berlin: Messungen der elektrischen Leitfähigkeit von CdS-Kristallen bei Bestrahlung durch Elektronen mittlerer Energie. (Mit 6 Abbildungen) ... | 413   |
| H. Koppe, Göttingen: Die Berechnung von Zustandssummen mittels Laplace-Transformationen .....   | 423   |

Für diese Zeitschrift werden grundsätzlich nur Arbeiten angenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung geht das alleinige Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung einschließlich des Rechts der Veranstaltung von Sonderdrucken auf den Verlag über. Von jeder Arbeit liefert der Verlag 75 Sonderabzüge kostenlos.

Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn Prof. Dr. F. Möglich, (1) Berlin-Buch, Lindenberg *Weg 74*, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte *druckfertig* einzuliefern und in den Korrekturen den bisherigen Raum des Textes nicht zu überschreiten. Die *Zeichnungen* sind in sorgfältiger Ausführung auf besonderen Blättern beizulegen.

Bei den *Zitaten* wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, das jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

Die Zeitschrift erscheint in Bänden mit 8 Heften, die zwanglos ausgegeben werden. Die Lieferung erfolgt durch den Sortimentsbuchhandel, in Ausnahmefällen unmittelbar vom Verlag. Der Bezugspreis beträgt je Band DM 34.— (U. S. \$ 8.16) zuzügl. Postgebühren. Einzelpreis dieses Heftes DM 5.20 (U. S. \$ 1.25).

Die Lieferung erfolgt bis zur Abbestellung, die nur für das Ende eines Bandes ausgesprochen werden kann.

# ANNALEN DER PHYSIK

6. FOLGE

\*

BAND 9, HEFT 8

\*

1951

## **Beitrag zur Theorie der optischen Schallanalyse. II**

*Zur optischen Analyse beliebiger sich überlagernder mechanischer Schwingungen*

Von Johannes Picht

(Mit 7 Abbildungen)

### **Inhaltsübersicht**

Besprechung einiger Modifikationen des Verfahrens der optischen Schallanalyse. — Erweiterung der früher zur Bestimmung der im akustischen Frequenzgemisch enthaltenen Teilfrequenzen abgeleiteten Formeln unter Berücksichtigung beliebiger Phasenbeziehungen der Einzelfrequenzen. — Anwendung der abgeleiteten Formeln auf ein spezielles akustisches Frequenzgemisch.

Im Anschluß an meinen in dieser Zeitschrift<sup>1)</sup> erschienenen ersten Beitrag zur optischen Schallanalyse seien nachstehend zunächst einige Ergänzungen (sowie einige Berichtigungen von Schreib- und Druckfehlern) mitgeteilt. Anschließend soll über weitere Untersuchungen zur Theorie der optischen Schallanalyse berichtet werden.

### **III. Ergänzungen und Berichtigungen zu I. und II.**

Wie seinerzeit angegeben, wird der die Schallaufzeichnung tragende Film von dem Licht einer nahezu punktförmigen Lichtquelle durchsetzt. Dabei befindet sich die Lichtquelle im Brennpunkt (Brennebene) eines Kondensors. Zu jedem Punkt der Lichtquelle gehört also nach dem Durchgang durch den Kondensor ein Parallelstrahlenbündel, dessen Richtung durch  $\alpha_0, \beta_0$  gegeben sei.  $\alpha_0$  bedeutet dabei den Richtungswinkel der Strahlen gegen die zur Längserstreckung des Filmes parallele  $x$ -Achse,  $\beta_0$  den Winkel der Strahlen gegen die zur  $x$ -Achse senkrechte, zur Ebene des Filmes parallele  $y$ -Achse. Die  $z$ -Achse, die senkrecht zur Filmebene verläuft, fällt mit der optischen Achse des Kondensors und des Objektivs, das die durch die Schallaufzeichnung des Filmes bedingte Beugungserscheinung in seiner Brennebene abbildet, zusammen. Die Winkel  $\alpha_0$  und  $\beta_0$  sind demnach durch den betreffenden Punkt der Lichtquelle und den objektseitigen Knotenpunkt des Kondensors, der hier mit dem objektseitigen Hauptpunkt des Kondensors zusammenfällt, bestimmt. In Abhängigkeit von der Gestalt der Lichtquelle sind die Werte  $\alpha_0$  und  $\beta_0$  veränderlich, und zwar in den Grenzen (Abb. I)

$$\frac{\pi}{2} - \alpha_0^* \leq \alpha_0 \leq \frac{\pi}{2} + \alpha_0^*$$

bzw.

$$\frac{\pi}{2} - \beta_0^*(\alpha_0) \leq \beta_0 \leq \frac{\pi}{2} + \beta_0^*(\alpha_0),$$

wo  $\beta_0^*$  und  $\beta_0^*$  durch die Form der Lichtquelle gegebene Funktionen von  $\alpha_0$  sind.

<sup>1)</sup> J. Picht, Ann. Physik (6) 5, 117–132 (1949).

Diese Grenzen von  $\beta_0$  wurden seinerzeit durch  $-g_1(\alpha_0)$  und  $+g_2(\alpha_0)$  bezeichnet, so daß  $g_1(\alpha_0) = \beta_0^*(\alpha_0) - \frac{\pi}{2}$  und  $g_2(\alpha_0) = \beta_0^*(\alpha_0) + \frac{\pi}{2}$  ist<sup>2)</sup>.

Bei einer kreisförmig begrenzten Lichtquelle ist demnach – sofern sie hinreichend klein ist und ihr Mittelpunkt auf der optischen Achse liegt – anzusetzen:

$$g_1(\alpha_0) = \sqrt{\sin^2 \gamma_0^* - \cos^2 \alpha_0} - \frac{\pi}{2} \approx \sqrt{\gamma_0^{*2} - \cos^2 \alpha_0} - \frac{\pi}{2}$$

und 
$$g_2(\alpha_0) = \sqrt{\sin^2 \gamma_0^* + \cos^2 \alpha_0} + \frac{\pi}{2} \approx \sqrt{\gamma_0^{*2} + \cos^2 \alpha_0} + \frac{\pi}{2}.$$

Entsprechend muß es bei einer rechteckig begrenzten Lichtquelle mit zu den Koordinatenachsen  $x$  und  $y$  parallelen Begrenzungslinien heißen:

$\frac{\pi}{2} - o_1 \leq \alpha_0 \leq \frac{\pi}{2} + o_1$  und  $\frac{\pi}{2} - o_2 \leq \beta_0 \leq \frac{\pi}{2} + o_2$ , wobei  $2o_1$  der Winkel ist, unter dem die zur  $x$ -Achse parallele Begrenzungslinie,  $2o_2$  der Winkel, unter dem

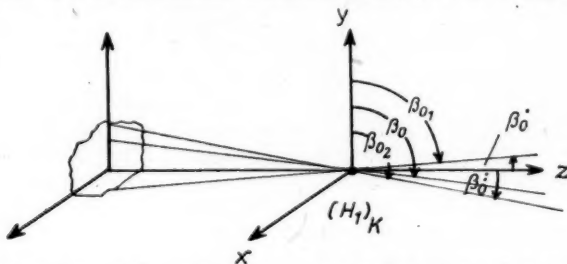


Abb. 1. Zur Bestimmung der Grenzen des Richtungswinkels  $\beta_0$  und zur Definition der Größen  $\beta_0^*$  und  $\beta_0^*$  [ $\alpha_0^*$  und  $\alpha_0^*$  sind entsprechend definiert]

$$\beta_{01} \leq \beta_0 \leq \beta_{02}; \quad \beta_{01} = \beta_{01}(\alpha_0); \quad \beta_{02} = \beta_{02}(\alpha_0)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_0^* &= \frac{\pi}{2} - \beta_{01} \\ \beta_0^* &= \beta_{02} - \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\}, \text{ so daß } \beta_0^* = \beta_0^*(\alpha_0); \quad \beta_0^* = \beta_0^*(\alpha_0)$$

$$\frac{\pi}{2} - \beta_0^* \leq \beta_0 \leq \frac{\pi}{2} + \beta_0^* \quad \left[ \text{in der Zeichnung: } \alpha_0 = \frac{\pi}{2} \right]$$

$$-g_1(\alpha_0) \leq \beta_0 \leq +g_2(\alpha_0) \quad \text{mit} \quad \left\{ \begin{aligned} g_1(\alpha_0) &= \beta_0^* - \frac{\pi}{2} \\ g_2(\alpha_0) &= \beta_0^* + \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right.$$

Bei zur  $z$ -Achse symmetrischer, kreisförmig begrenzter Lichtquelle wird:

$$\cos^2 \beta_0 = \sin^2 \gamma_0 - \cos^2 \alpha_0,$$

also

$$\cos^2 \beta_{01} = \cos^2 \beta_{02} = \sin^2 \gamma_0^* - \cos^2 \alpha_0$$

$$\sin^2 \beta_0^* = \sin^2 \beta_0^* = \sin^2 \gamma_0^* - \cos^2 \alpha_0$$

bei genügend kleiner Lichtquelle demnach

$$\beta_0 = \beta_0^* = \sqrt{\gamma_0^{*2} - \cos^2 \alpha_0}; \quad \beta_0^* = \beta_0^*(\alpha_0); \quad \beta_0^* = \beta_0^*(\alpha_0)$$

$$-g_1(\alpha_0) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\gamma_0^{*2} - \cos^2 \alpha_0} \leq \beta_0 \leq \frac{\pi}{2} + \sqrt{\gamma_0^{*2} - \cos^2 \alpha_0} = +g_2(\alpha_0),$$

wo  $2\gamma_0^*$  der Winkel, unter dem die (kleine) zur  $z$ -Achse symmetrische, kreisförmig begrenzte Lichtquelle vom objektseitigen Hauptpunkt des Kondensors aus erscheint.

<sup>2)</sup> Auf S. 119 der oben zitierten Arbeit war für  $g_1(\alpha_0)$  und  $g_2(\alpha_0)$  versehentlich ein anderer Ausdruck angegeben, der aber die weiteren Ergebnisse nicht beeinflußt.



die zur  $y$ -Achse parallele Begrenzungslinie der rechteckig begrenzten Lichtquelle vom objektseitigen Hauptpunkt des Kondensors aus erscheint. Entsprechend ist bei der kreisförmig begrenzten Lichtquelle  $2\gamma_0$  der Winkel, unter dem der Durchmesser der kreisförmig begrenzten Lichtquelle vom objektseitigen Hauptpunkt des Kondensors aus erscheint.

In Zeile 7 des 4. Abschnittes der S. 118 muß es nicht „Scheidekante“, sondern „Schneidekante“ heißen.

S. 120, Formel 4: In dieser Formel bedeutet (wie seinerzeit nicht ausdrücklich angegeben wurde, aber aus dem Formelausdruck unmittelbar zu ersehen ist)  $k_T = 2\pi T$  und  $k_j = 2\pi T \nu_j$ . Da die  $T \nu_j$  die „Schwingungszahlen“ des Frequenzgemisches, also die reziproken Wellenlängen der einzelnen Teilschwingungen bedeuten, entsprechen die Größen  $k_T$  und  $k_j$  (die sich auf den Schall beziehen)

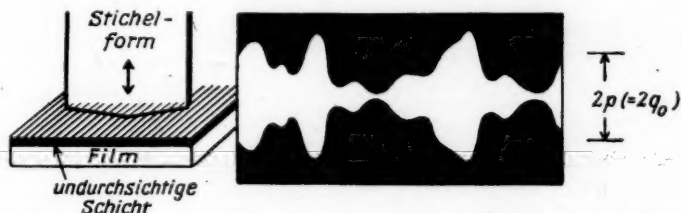


Abb. 2. Stichel-form und Aussehen einer Schallaufzeichnung nach Schallaufzeichnungs-verfahren 1

in ihrer formalen Bildung dem  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  des Lichtes. Es ist also:  $2\pi T \nu_j = \frac{2\pi}{\lambda_j} = k_j = k_T \nu_j$ , wenn  $\lambda_j$  die Wellenlänge der Teilschwingung  $j$  des akustischen Frequenzgemisches bedeutet. Das beliebige akustische Frequenzgemisch hatten wir dargestellt durch  $f(x) = p + \sum q_j \cos(k_j x)$ . Seite 127 Zeile 3 nach Formel (19) haben wir  $p = 0$  gesetzt und dementsprechend  $f(x) = \sum q_j \cos(k_j x)$  geschrieben. Dies bedeutet natürlich keine Einschränkung der Allgemeingültigkeit. Wir brauchen ja nur  $k_0 = 0$  und  $q_0 = p$  zu setzen, um auf den früheren Ansatz zurück-zukommen.

Diese Bemerkung ist aus folgendem Grunde wichtig: Bei den üblichen Schall-registrierungen nach dem S. 118 Absatz 4 angegebenen Verfahren ist dafür zu sorgen, daß der Stichel, der durch seine Auf- und Abwärtsbewegung die sehr dünne undurchsichtige Filmschicht des unter ihm entlangleitenden Filmes bei der Schall-registrierung fortnimmt, bei seinen Auf- und Abwärtsbewegungen sich mit seiner tiefsten Stelle, dem „Scheitel“ des sehr stumpfen Winkels, nie ganz vom Film abhebt, sondern auch bei seinen höchsten Stellungen noch (mindestens) gerade die lichtundurchlässige Schicht durchdringt. Der nachher optisch zu analysie-rende Film hat also etwa das durch Abb. 2 dargestellte Aussehen. Die Größe  $p$  können wir als die Amplitude der „0-Frequenz“ bezeichnen. Sie entspricht also der „Ordinate“ derjenigen zur Längserstreckung des Filmes parallelen, von der „Mittellinie“ des Filmes nach oben und unten gleich weit entfernten Linien, mit Bezug auf die sich die Kurve der akustischen Frequenzmischung sowohl in der oberen als auch — dazu spiegelbildlich mit Bezug auf die Mittellinie — in der unteren Hälfte des Filmes aufzeichnet.

Man nimmt die Schallaufzeichnung im allgemeinen so vor, daß die der Filmmittellinie am nächsten kommenden, undurchsichtig bleibenden Teile des Filmes nicht bis ganz an die Mittellinie heranreichen, und spricht von einer bestimmprozentigen „Aussteuerung“ der Filmaufzeichnung, also etwa einer  $66\frac{2}{3}\%$  proz., wenn der Abstand jener „Bezugslinien“ von der Mittellinie, also das  $p$ , gleich dem 1,5fachen  $\left(= \frac{100}{66\frac{2}{3}}\right)$  der Maximalelongation des Schallgemisches  $\sum_{j=1}^n q_j \cos(k_j x)$  ist.

Durch eine Änderung des Verfahrens der Schallaufzeichnung, das sogenannte „Gegentaktverfahren“ läßt sich erreichen, daß man jetzt die „0-Frequenz“, die



Abb. 3. Aussehen einer Schallaufzeichnung nach Schallaufzeichnungsverfahren 2 (Gegentaktverfahren)  
[ $p = q_0 = 0$ ]

für das Analysierverfahren gewisse Nachteile besitzt, ausschaltet, also in  $f(x) = \sum q_j \cos(k_j x)$  nur solche  $k_j$ -Werte auftreten, die  $\neq 0$  sind. Man muß dann dafür sorgen, daß der Stichel in seiner Ruhelage (Nullage) die untere Begrenzungsfläche der lichtundurchlässigen Schicht gerade berührt und jedesmal in dem Augenblick, in dem er infolge der auf ihn übertragenen Schwingungen des Schallgemisches durch diese Ruhelage hindurchgehen würde, automatisch in

seiner Bewegungsrichtung umgeschaltet wird. Statt der in Abb. 2 dargestellten Schallaufzeichnung würde sich dann also etwa die durch Abb. 3 dargestellte Schallaufzeichnung ergeben.

Eine andere, etwa als „Gegentaktverfahren 2. Art“ zu bezeichnende Schallaufzeichnung läßt sich mit einem Doppelstichel erreichen, der — wie Abb. 4 an-

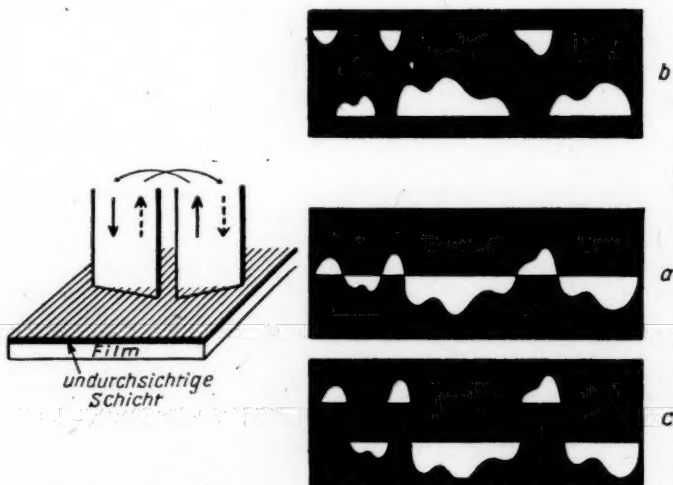


Abb. 4. Stichelform und Aussehen einer Schallaufzeichnung nach Schallaufzeichnungsverfahren 3 (Gegentaktverfahren 2. Art [a, b und c])

deutet — aus zwei Hälften besteht, von denen jede nur eine einseitige Abschrägung der messerscharfen Seite besitzt und von denen die eine sich aufwärts bewegt, wenn die andere Hälfte sich abwärts bewegt und umgekehrt, derart, daß beide, in ihrer Ruhelage („Null-Frequenz“) mit der tiefsten Stelle ihrer abgeschrägten Schneide die untere Begrenzungsfläche der lichtundurchlässigen Schicht gerade berühren. Bei diesem „Gegentaktverfahren 2. Art“ würde sich also eine Schallaufzeichnung ergeben, wie sie etwa durch eine der Abb. 4 dargestellt ist, von denen die Abb. 4a voraussetzt, daß sich die beiden Stichelhälften mit ihrer längeren vertikalen Begrenzungslinie gerade berühren, die Abb. 4b, daß sich beide Stichelhälften mit ihrer kurzen vertikalen Begrenzungslinie gerade berühren, während die Abb. 4c der Abb. 4a entspricht, aber unter der Annahme, daß keine direkte Berührung beider Stichelhälften stattfindet. Für die optische Analyse des Schallfrequenzgemisches sind die drei Abbildungen im wesentlichen gleichwertig.

Bei dem in Abschnitt II (S. 129—132 der früheren Arbeit) als Anwendungsbeispiel behandelten akustischen Frequenzgemisch wurde keine „Null-Frequenz“ vorausgesetzt. Die dort gegebene Abbildung setzt also voraus — was seinerzeit nicht ausdrücklich betont wurde —, daß die Schallaufzeichnung nach dem „Gegentaktverfahren“ (1. Art) vorgenommen wurde.

#### IV. Erweiterungen der Formeln des Abschnitts I bei Berücksichtigung der Phasenbeziehungen der einzelnen Frequenzen des akustischen Frequenzgemisches

In Abschn. II waren die in Abschn. I angegebenen Formeln (21)–(25) auf ein Beispiel der optischen Analyse eines speziellen akustischen Frequenzgemisches angewandt. Dabei hatte sich gezeigt, daß sich die im akustischen Frequenzgemisch enthaltenen Frequenzen und ihre Amplituden zwar nicht mit voller Exaktheit, aber doch mit im allgemeinen hinreichender Genauigkeit bestimmen lassen, sofern die Amplituden der einzelnen Frequenzen sich nicht zu stark unterscheiden, sofern also bei den Frequenzen kleiner Amplituden diese nicht kleiner als etwa 12,5% der im Frequenzgemisch auftretenden größten Amplitude ist (Abb. 5).

Zur Analyse eines Frequenzgemisches — bei dem es sich ja nicht unbedingt um ein akustisches zu handeln braucht — gehört aber nicht nur die Bestimmung der einzelnen im Frequenzgemisch enthaltenen Frequenzen und ihrer Amplituden, sondern auch ihrer gegenseitigen Phasenbeziehungen an einer bestimmten Stelle der Filmaufzeichnung, d. h. zu einem bestimmten Zeitpunkt.

Es soll daher auch die Frage untersucht werden, ob und gegebenenfalls wie weit es möglich ist, diese gegenseitige Phasenbeziehung der einzelnen Frequenzen des Frequenzgemisches zu bestimmen, wobei es ja nur nötig ist, diese Phasenbeziehung zu einem bestimmten Zeitpunkt zu kennen, da sich dann automatisch die Phasenbeziehungen der einzelnen Frequenzen zu anderen Zeitpunkten ergeben.

In Abschn. I hatten wir darauf hingewiesen [S. 125 u. 126, Formeln (15–18b)]<sup>3)</sup>, daß das optische Schallanalyisierverfahren wahrscheinlich verbessert werden kann indem man die zu analysierende Schallaufzeichnung in ihrer Längsrichtung noch einmal spiegelbildlich neben die eigentliche Schallaufzeichnung kopiert und zur Analyse einmal gleichzeitig die Schallaufzeichnung und ihre spiegelbildliche Kopie

<sup>3)</sup> In Formel (16) S. 125 muß es unter den Integralen natürlich jeweils  $(\tilde{r} w)$  [und nicht  $(r w)$ ] heißen, entsprechend der linksauftretenden Größe  $I_{\tilde{r} w} \frac{\lambda}{L}, E$ .

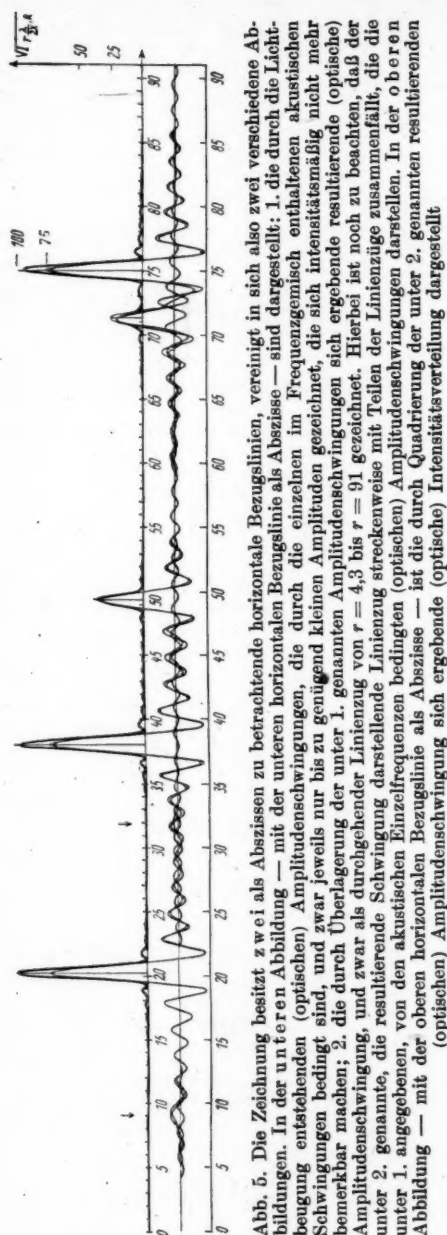


Abb. 5. Die Zeichnung besitzt zwei als Abszissen zu betrachtende horizontale Bezugslinien, vereinigt in sich also zwei verschiedene Abbildungen. In der unteren Abbildung — mit der unteren horizontalen Bezugslinie als Abszisse — sind dargestellt: 1. die durch die Lichtbeugung entstehenden (optischen) Amplitudenschwingungen, die durch die einzelnen im Frequenzgemisch enthaltenen akustischen Schwingungen bedingt sind, und zwar jeweils nur bis zu genügend kleinen Amplituden gezeichnet, die sich intensitätsmäßig nicht mehr bemerkbar machen; 2. die durch Überlagerung der unter 1. genannten Amplitudenschwingungen sich ergebende resultierende (optische) Amplitudenschwingung, und zwar als durchgehender Linienzug von  $r = 4.3$  bis  $r = 91$  gezeichnet. Hierbei ist noch zu beachten, daß die unter 2. genannte, die resultierende Schwingung darstellende Linienzug streckenweise mit Teilen der Linienzüge zusammenfällt, die die unter 1. angegebenen, von den akustischen Einzelfrequenzen bedingten (optischen) Amplitudenschwingungen darstellen. In der oberen Abbildung — mit der oberen horizontalen Bezugslinie als Abszisse — ist die durch Quadratur der unter 2. genannten resultierenden (optischen) Amplitudenschwingung sich ergebende (optische) Intensitätsverteilung dargestellt.

derart benutzt, daß die optische Achse von Kollimator und Beobachtungsfernrohr durch den Schnittpunkt der beiden Symmetrielinien der Schallaufzeichnung, der vertikalen ( $=y$ -Achse) und der horizontalen ( $=x$ -Achse) Symmetrielinie hindurchtritt. Eine zweite Analyse soll in der Weise stattfinden, daß — ohne Lageveränderung der Schallaufzeichnung — die spiegelbildliche Aufzeichnung abgedeckt wird.

Bei dem in Abschn. II (S. 129—132) betrachteten Frequenzgemisch (Abb. 5) war willkürlich angenommen, daß die einzelnen Frequenzen des Frequenzgemisches in der Mitte des durchleuchteten Filmbereiches Phasenübereinstimmung aufweisen, und daß diese für alle Einzelfrequenzen gleiche Phase an jener Stelle ein Amplitudenmaximum ergibt. Infolge jener willkürlichen Annahme über die Phase des Frequenzgemisches ergibt sich daher, daß die Schallaufzeichnung bereits spiegelbildlich in dem oben angegebenen Sinn, also spiegelbildlich zur Schnittgeraden der Aufzeichnungsebene mit der zu dieser Ebene senkrechten, durch die optische Achse des Fernrohrs gehenden vertikalen Ebene ist. Das neue Verfahren (siehe oben) würde demnach — angewandt auf das frühere Frequenzgemisch mit der gleichen Phasenvoraussetzung — zunächst zu keinem neuen Ergebnis führen. Es würde aber (wie aus den nachstehend noch näher angegebenen Formeln folgt) auf Grund der oben erwähnten zweiten Analyse, bei der der spiegelbildliche Teil ab-

gedeckt ist, zeigen, daß alle Einzelfrequenzen des Frequenzgemisches an der Stelle  $x = 0$  Phasenübereinstimmung besitzen und dort die gemeinschaftliche Phasenkonstante  $\Delta = 0$  haben.

Ist jene spezielle Annahme über die Phasenbeziehung der einzelnen Frequenzen des Frequenzgemisches nicht zutreffend, so können wir die Schallaufzeichnung  $y = f(x)$  durch folgenden allgemeinen Ausdruck darstellen:

$$f(x) = \sum_j q_j \cos(k_j x - \Delta_j). \quad (27)$$

Diesen Funktionsausdruck können wir auch folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_j q_j \cos \Delta_j \cos(k_j x) + \sum_j q_j \sin \Delta_j \sin(k_j x) \\ &= \sum_j Q_j \cos(k_j x) + \sum_j P_j \sin(k_j x) \end{aligned} \quad (28)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} Q_j &= q_j \cos \Delta_j & P_j &= q_j \sin \Delta_j \\ q_j &= \sqrt{Q_j^2 + P_j^2} & \Delta_j &= \arctg \frac{P_j}{Q_j} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Ferner war noch

$$k_j = \frac{2\pi \nu_j}{L},$$

wo  $\nu_j$  die Schwingungszahl der  $j$ -ten Teilschwingung des Frequenzgemisches und  $L$  ( $= 320 \text{ mm sec}^{-1}$ ) die Geschwindigkeit des Filmes bei der Schallaufzeichnung ist.

Wir sehen also, daß es zur einwandfreien Schallanalyse notwendig ist, nicht nur die Schwingungszahl  $\nu_j$  und die zugehörigen Amplituden  $q_j$  zu ermitteln, sondern auch die Größen  $Q_j$  und  $P_j$ , um aus ihnen die Phasen  $\Delta_j$  berechnen zu können. Wie wir unten allerdings sehen werden, lassen sich die Phasen  $\Delta_j$  auch jetzt nicht einwandfrei bestimmen, da man für jedes  $\Delta_j$  jeweils vier Werte erhält, von denen natürlich nur einer richtig sein kann. Denn da aus der optischen Analyse des akustischen Frequenzgemisches nur Intensitätswerte der Beugungshauptmaxima entnommen werden können, können nur die Werte  $Q_j^2$  und  $P_j^2$  bestimmt werden,  $Q_j$  und  $P_j$  also nur bis auf ihr Vorzeichen. Das bedeutet aber, daß auch das Verhältnis  $\frac{P_j}{Q_j}$  nur bis auf das Vorzeichen ermittelt werden kann. Da andererseits

der Tangens eine mit  $\pi$  periodische Funktion ist, erhalten wir sowohl für  $-\left|\frac{P_j}{Q_j}\right|$  als auch für  $+\left|\frac{P_j}{Q_j}\right|$  je zwei Werte für  $\Delta_j$ , die sich jeweils um  $\pi$  unterscheiden.

Während bei dem in Abschn. II (S. 129—132) durchgeführten

1. Analysierverfahren die Funktion  $f(x)$  im Bereich  $-X \leq x \leq +X$  für die Analyse benutzt wurde, ist nach dem neu vorgeschlagenen

2. Analysierverfahren für die Analyse einmal

a) die Schallaufzeichnung  $f(x)$  mit  $-X \leq x \leq 0$

und ein zweites Mal

b) die Schallaufzeichnung  $\begin{cases} f(x) & \text{mit } -X \leq x \leq 0 \\ f(-x) & \text{mit } 0 \leq x \leq +X \end{cases}$

zu benutzen.

Eine weitere Möglichkeit für das neu vorgeschlagene Verfahren ist das

### 3. Analysierverfahren, das darin besteht, einmal

a) die Schallaufzeichnung  $f(x)$  mit  $0 \leq x \leq +X$   
und ein zweites Mal

b) die Schallaufzeichnung  $\begin{cases} f(-x) \text{ mit } -X \leq x \leq 0 \\ f(+x) \text{ mit } 0 \leq x \leq +X \end{cases}$

zu benutzen.

Die hier auftretende Größe  $X$ , die die Länge des zur Analyse benutzten durchleuchteten Filmbereiches (beiderseits) begrenzt, sei wieder (wie in Abschn. II)  $X = 5 \text{ mm}$ .

Nach Formel (3) S. 120 des ersten Abschnittes ist die Intensitätsverteilung längs der Horizontalen ( $\beta = \frac{\pi}{2} = R$ ) der Beugungsfigur in der Brennebene des Beobachtungsfernrohrs unter Fortlassung des von der Größe der Lichtquelle abhängenden Faktors

$$I_{F\alpha R}^{\text{Pkt}} = 2 \left| \int_{-X_1}^{+X_2} f(x) e^{ikx \cos \alpha} dx \right|^2. \quad (3)$$

Für den oben erwähnten ersten Fall der Schallanalyse haben wir  $X_1 = X_2 = X$  und für  $f(x)$  die oben angegebene Formel einzusetzen. In der vorstehenden Formel ist noch — wie früher schon angegeben —

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

wo  $\lambda$  die Wellenlänge des zur Analyse benutzten monochromatischen Lichtes ist.  $\alpha$  ist der Winkel gegen die  $x$ -Achse der Schallaufzeichnung und gibt wegen  $\beta$  (Winkel gegen die  $y$ -Achse)  $= R$  die Richtung, in der die angegebenen Intensitätswerte in der Bildebene des Fernrohrobjektivs vom bildseitigen Hauptpunkt des Fernrohrobjektivs aus gesehen erscheinen.

Nach zweckentsprechenden Umformungen erhalten wir jetzt

$$I_{F\alpha R}^{\text{Pkt}} = 2 X^2 \left[ \sum_j q_j \cos \Delta_j \left( \frac{\sin(k_j + k \cos \alpha) X}{(k_j + k \cos \alpha) X} + \frac{\sin(k_j - k \cos \alpha) X}{(k_j - k \cos \alpha) X} \right) \right]^2 + 2 X^2 \left[ \sum_j q_j \sin \Delta_j \left( \frac{\sin(k_j + k \cos \alpha) X}{(k_j + k \cos \alpha) X} - \frac{\sin(k_j - k \cos \alpha) X}{(k_j - k \cos \alpha) X} \right) \right]^2. \quad (30)$$

Setzen wir wieder

$$\cos \alpha = r \frac{\lambda}{2X} \left( = \bar{r} \frac{\lambda}{l} \right) \quad \text{und} \quad \frac{2X}{L} r_j = r_j, \quad (31)$$

so ist

$$k \cos \alpha X = r \pi \quad \text{und} \quad k_j X = r_j \pi.$$

(Die früher durch  $r_{j0}$  bezeichnete Größe bezeichnen wir jetzt einfach durch  $r_j$ .)

Wir erhalten

$$I_{F\frac{\lambda}{2X}, R}^{\text{Pkt}} = I_{F\alpha R}^{\text{Pkt}} = 2 X^2 \left[ \sum_j q_j \cos \Delta_j \left( \frac{\sin(r - r_j) \pi}{(r - r_j) \pi} + \frac{\sin(r + r_j) \pi}{(r + r_j) \pi} \right) \right]^2 + 2 X^2 \left[ \sum_j q_j \sin \Delta_j \left( \frac{\sin(r - r_j) \pi}{(r - r_j) \pi} - \frac{\sin(r + r_j) \pi}{(r + r_j) \pi} \right) \right]^2, \quad (32)$$

wo wir noch bei  $X = 5 \text{ mm}$  für  $2 X^2$  den Wert 50 schreiben können.



Die vorstehende Formel ist eine Verallgemeinerung der Formel (25) S. 128 des Abschnittes I, und zwar für den Fall, daß die einzelnen Frequenzen des akustischen Frequenzgemisches an der Stelle  $x = 0$  nicht übereinstimmend die Phasenkonstante  $\Delta_j = 0$ , sondern beliebige Phasenkonstanten  $\Delta_j$  besitzen. Beim Vergleich beider Formeln ist noch zu beachten, daß wir früher  $r - r_j = s_j$  und dementsprechend  $r + r_j = s_j + 2r_j$  und in diesem letzten Ausdruck statt  $r_j$  den Wert  $r_{j0}$  geschrieben haben.

Die vorstehende Formel für  $I_{\frac{r}{2} \alpha R}^{\text{Pkt}}$  zeigt, daß

für  $r = r_j$  jeweils das erste Glied und

für  $r = -r_j$  jeweils das zweite Glied der ( )-Klammer

sein Maximum hat, während jeweils das andere Glied an dieser Stelle nur einen sehr kleinen Wert besitzt. Die Intensitätsverteilung ist also zu  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , d. h. zur Mitte der Beugungsfigur vollkommen symmetrisch, wie vorauszusehen war. Wir erkennen wieder, daß — wegen der Überlagerung des zweiten Bruches (dessen Wert verhältnismäßig klein ist): nur angenähert — aus der Lage der Hauptmaxima die im Frequenzgemisch enthaltenen Schwingungszahlen  $\nu_j$  entnommen werden können, und zwar ergibt sich, wenn wir noch für  $L$  und  $X$  die angenommenen Zahlenwerte einsetzen

$$\nu_j = r_j \frac{L}{2X} = 32 r_j \quad (33a)$$

oder aus dem zu  $r_j$  gehörigen  $\alpha_j$ -Wert:

$$\nu_j = \frac{L}{\lambda} \cos \alpha_j = \frac{320}{\lambda} \cos \alpha_j, \quad (33b)$$

wo die Wellenlänge  $\lambda$  des für die Analyse benutzten Lichtes gleichfalls in mm gemessen vorausgesetzt ist und  $\alpha$  in Richtung der optischen Achse den Wert  $\frac{\pi}{2}$  hat. Mit dem von der Achse aus gemessenen Wert  $\frac{\pi}{2} - \alpha = \gamma$  wird<sup>4)</sup>

$$\nu_j = \frac{L}{\lambda} \sin \gamma_j = \frac{320}{\lambda} \sin \gamma_j. \quad (33c)$$

Aus dem linearen Achsenabstand  $l$  der Linien maximaler Intensität in der Brennebene des Beobachtungsfernrohres, dessen Brennweite =  $f$  sei, ergibt sich entsprechend

$$\nu_j = \frac{L}{\lambda} \frac{l_j}{\sqrt{f^2 + l_j^2}} = \frac{320}{\lambda} \frac{l_j}{\sqrt{f^2 + l_j^2}} \approx \frac{320}{\lambda} \frac{l_j}{f}. \quad (33d)$$

Für eine Wellenlänge  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ cm} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$  wird demnach

$$\nu_j \approx 64 \cdot 10^4 \frac{l_j}{f} \text{ sec}^{-1}. \quad (33^*)$$

Ist außerdem die Brennweite des Beobachtungsfernrohres beispielsweise  $f = 1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$ , so wird bei  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$

$$\nu_j \approx 640 (l_j)_{\text{in mm}} \text{ gemessen sec}^{-1}.$$

<sup>4)</sup> Wir hatten  $\beta = R = \frac{\pi}{2}$  gesetzt, benutzen hier also nur die Beugungserscheinungen längs der  $x$ -Achse, die der Bezugsschse der Schallaufzeichnung, d. h. der Längserstreckung des Films parallel ist. Hierfür ist  $\frac{\pi}{2} - \alpha = \gamma$ .



Für das oben unter 2. vorgeschlagene neue Analysierverfahren haben wir für Fall 2a) in (5) die Grenze  $-X_1 = -X$ , die Grenze  $+X_2 = 0$  zu setzen. Wir erhalten in diesem Fall nach einigem Umformen

$$I_{F_{\alpha R}}^{\text{Pkt}} = \frac{1}{2} X^2 \left( \sum_j q_j \left( \cos(\Delta_j - \frac{1}{2} [r - r_j] \pi) \frac{\sin \frac{1}{2} (r - r_j) \pi}{\frac{1}{2} (r - r_j) \pi} + \cos(\Delta_j + \frac{1}{2} [r + r_j] \pi) \frac{\sin \frac{1}{2} (r + r_j) \pi}{\frac{1}{2} (r + r_j) \pi} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} X^2 \left( \sum_j q_j \left( \sin(\Delta_j - \frac{1}{2} [r - r_j] \pi) \frac{\sin \frac{1}{2} (r - r_j) \pi}{\frac{1}{2} (r - r_j) \pi} - \sin(\Delta_j + \frac{1}{2} [r + r_j] \pi) \frac{\sin \frac{1}{2} (r + r_j) \pi}{\frac{1}{2} (r + r_j) \pi} \right)^2 \right) \right. \quad (34)$$

Dieser Ausdruck läßt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$I_{F_{\alpha R}}^{\text{Pkt}} = \frac{1}{2} X^2 \left( \sum_j q_j \cos \Delta_j \left( \frac{\sin(r - r_j) \pi}{(r - r_j) \pi} + \frac{\sin(r + r_j) \pi}{(r + r_j) \pi} \right) \right. \\ \left. + \sum_j q_j \sin \Delta_j \left( \frac{1 - \cos(r - r_j) \pi}{(r - r_j) \pi} - \frac{1 - \cos(r + r_j) \pi}{(r + r_j) \pi} \right) \right)^2 \\ + \frac{1}{2} X^2 \left( \sum_j q_j \sin \Delta_j \left( \frac{\sin(r - r_j) \pi}{(r - r_j) \pi} - \frac{\sin(r + r_j) \pi}{(r + r_j) \pi} \right) \right. \\ \left. - \sum_j q_j \cos \Delta_j \left( \frac{1 - \cos(r - r_j) \pi}{(r - r_j) \pi} + \frac{1 - \cos(r + r_j) \pi}{(r + r_j) \pi} \right) \right)^2 \quad (35)$$

Dieser Ausdruck entspricht der in Abschnitt I auf S. 126 des ersten Beitrages durch  $I_{\alpha}^{(n)}$  bezeichneten Größe.

Für den Fall 2b) haben wir in den Absolutstrichen der Formel (3) die Summe zweier Integrale zu nehmen, von denen das erste Integral in den Grenzen  $-X \dots 0$  und das zweite Integral in den Grenzen  $0 \dots +X$  zu nehmen ist. Der Integrand des ersten Integrals lautet jetzt so wie in Gleichung (3), während der Integrand des zweiten Integrals der Funktionsausdruck

$$f(-x) e^{ikx \cos \alpha}$$

ist. Werten wir diese Integrale aus, indem wir beide Integrale in Real- und Imaginärteil zerlegen, so finden wir nach einigen Umformungen, daß sich die Imaginärteile gegenseitig fortheben, während die beiden Realteile einander gleich werden. Wir erhalten demnach jetzt

$$I_{F_{\alpha R}}^{\text{Pkt}} = 2 \left| 2 \int_{-X}^0 f(x) \cos(kx \cos \alpha) dx \right|^2 \quad (36)$$

$$I_{F_{\alpha R}}^{\text{Pkt}} = 2 X^2 \left( \sum_j q_j \cos \Delta_j \left( \frac{\sin(r - r_j) \pi}{(r - r_j) \pi} + \frac{\sin(r + r_j) \pi}{(r + r_j) \pi} \right) \right. \\ \left. + \sum_j q_j \sin \Delta_j \left( \frac{1 - \cos(r - r_j) \pi}{(r - r_j) \pi} - \frac{1 - \cos(r + r_j) \pi}{(r + r_j) \pi} \right) \right)^2 \quad (37)$$

Für diesen Ausdruck können wir auch schreiben

$$I_{F_{\alpha R}}^{\text{Pkt}} = 2 X^2 \left( \sum_j q_j \left( \cos(\Delta_j - \frac{1}{2} [r - r_j] \pi) \frac{\sin \frac{1}{2} (r - r_j) \pi}{\frac{1}{2} (r - r_j) \pi} + \cos(\Delta_j + \frac{1}{2} [r + r_j] \pi) \frac{\sin \frac{1}{2} (r + r_j) \pi}{\frac{1}{2} (r + r_j) \pi} \right)^2 \right. \quad (38)$$

Dieser Ausdruck entspricht der in Abschn. I des ersten Beitrages auf S. 126 durch  $I_n^{(0)}$  bezeichneten Größe. Man erkennt bereits beim Vergleich der Formeln (38) mit (34) bzw. (37) mit (35), daß die Ausdrücke (37) und (38) als Teilausdrücke in den Formeln (35) bzw. (34) auftreten, daß es dementsprechend — wie die weiter unten folgende ausführliche Diskussion noch genauer zeigen wird — möglich sein wird, aus der Intensität der Beugungslinien, wie sie mittels der Anordnung nach 2a) und 2b) erhalten werden, nicht nur die Amplituden  $q_j$ , sondern auch die Phasen  $\Delta_j$  der verschiedenen Frequenzen des Frequenzgemisches (mit der in Abschn. III erwähnten Unbestimmtheit) zu ermitteln.

Ganz entsprechend erhalten wir für die Anordnung nach 3a), für die wir in (3) die untere Integralgrenze  $-X_1 = 0$ , die obere Integralgrenze  $+X_2 = +X$  zu setzen haben, nach einigen Umformungen den Ausdruck

$$I_{F_{\alpha R}}^{\text{Pkt}} = \frac{1}{2} X^2 \left( \sum_j q_j \left( \cos(\Delta_j + \frac{1}{2} [r - r_j] \pi) \frac{\sin \frac{1}{2} (r - r_j) \pi}{\frac{1}{2} (r - r_j) \pi} + \cos(\Delta_j - \frac{1}{2} [r + r_j] \pi) \frac{\sin \frac{1}{2} (r + r_j) \pi}{\frac{1}{2} (r + r_j) \pi} \right)^2 + \frac{1}{2} X^2 \left( \sum_j q_j \left( \sin(\Delta_j + \frac{1}{2} [r - r_j] \pi) \frac{\sin \frac{1}{2} (r - r_j) \pi}{\frac{1}{2} (r - r_j) \pi} - \sin(\Delta_j - \frac{1}{2} [r + r_j] \pi) \frac{\sin \frac{1}{2} (r + r_j) \pi}{\frac{1}{2} (r + r_j) \pi} \right)^2 \right). \quad (39)$$

Dieser Ausdruck läßt sich auch folgendermaßen schreiben

$$I_{F_{\alpha R}}^{\text{Pkt}} = \frac{1}{2} X^2 \left( \sum_j q_j \cos \Delta_j \left( \frac{\sin(r - r_j) \pi}{(r - r_j) \pi} + \frac{\sin(r + r_j) \pi}{(r + r_j) \pi} \right) - \sum_j q_j \sin \Delta_j \left( \frac{1 - \cos(r - r_j) \pi}{(r - r_j) \pi} - \frac{1 - \cos(r + r_j) \pi}{(r + r_j) \pi} \right) \right)^2 + \frac{1}{2} X^2 \left( \sum_j q_j \sin \Delta_j \left( \frac{\sin(r - r_j) \pi}{(r - r_j) \pi} - \frac{\sin(r + r_j) \pi}{(r + r_j) \pi} \right) + \sum_j q_j \cos \Delta_j \left( \frac{1 - \cos(r - r_j) \pi}{(r - r_j) \pi} + \frac{1 - \cos(r + r_j) \pi}{(r + r_j) \pi} \right) \right)^2. \quad (40)$$

Ein Vergleich der Ausdrücke für die Anordnungen 2a) und 3a) zeigt, daß die Formeln (35) und (40) zusammen — indem man auf die ihnen zugeordneten Amplituden zurückgeht — durch Überlagerung (Interferenz) den Ausdruck Formel (32) für die Anordnung nach 1) ergeben, wenn man von den resultierenden Amplituden wieder auf die Intensität übergeht. Dieser Zusammenhang entspricht der Tatsache, daß die physikalischen Anordnungen nach 2a) und 3a) zusammen genommen mit der Anordnung nach 1) identisch sind.

Für den Charakter des Funktionsverlaufes sind die Ausdrücke (39) bzw. (34) kennzeichnender als die Ausdrücke (40) und (35), da sie zeigen, daß hier — der halben beugenden Öffnung (der Breite  $X$ ) entsprechend — die Minima annähernd im Abstand  $\Delta r = 2$  aufeinander folgen, während sie im Fall 1) nach Gleichung (32) — der Öffnung  $2X$  entsprechend — annähernd im Abstand  $\Delta r = 1$  aufeinander folgen.

Für die Anordnung nach 3b) gelten ganz ähnliche Überlegungen wie für die Anordnung nach 2b). Auch hier heben sich die Imaginärteile der beiden Integral-

ausdrücke gegenseitig fort, während die Realteile einander gleich werden. Da

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sum_j q_j \cos(k_j x - \Delta_j) \\ f(-x) &= \sum_j q_j \cos(-k_j x - \Delta_j) = \sum_j q_j \cos(k_j x + \Delta_j) \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

und sich die Ausgangsintegrale der Anordnung 3b) von denen der Anordnung 2b) nur dadurch unterscheiden, daß in ihnen  $f(+x)$  mit  $f(-x)$  und umgekehrt vertauscht ist, so erkennen wir an (41), daß wir in den für Anordnung 2b) geltenden Formeln (37) und (38) nur das Vorzeichen von  $\Delta_j$  zu vertauschen brauchen, um die entsprechenden Formeln für die Anordnung 3b) zu erhalten.

Was wir im Anschluß an Formel (32) auf S. 389 oben bereits erwähnten, gilt — mit geringen Einschränkungen — auch für die Beugungsfiguren, die sich nach den Anordnungen 2a) und 2b) bzw. 3a) und 3b) ergeben, wie aus den Formeln (34) für Fall 2a), (38) für Fall 2b), (39) für Fall 3a) und die Gleichung (38) entsprechende Gleichung für Fall 3b) hervorgeht. Man erkennt aus diesen Formelausdrücken wieder, daß jedes der durch die  $j$ -te Teilschwingung bedingten Summenglieder aus zwei Teilgliedern besteht, von denen jedes den für Beugungserscheinungen charakteristischen Faktor  $\frac{\sin u}{u}$  enthält (mit  $u = \frac{1}{2}(r - r_j)\pi$  bzw.

$u = \frac{1}{2}(r + r_j)\pi$ ), wobei dieser Faktor  $\frac{\sin u}{u}$  im einen Teilglied für  $r = r_j$ , im anderen Teilglied für  $r = -r_j$  seinen Maximalwert erhält. Insofern ist also eine gewisse Symmetrie zu  $r = 0$ , d. h. zu  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , d. h. zur Mitte der Beugungsfigur

vorhanden. Auch die mit dem Faktor  $\frac{\sin u}{u}$  verbundenen cos- bzw. sin-Faktoren ändern an der Symmetrie mit Bezug auf die Mitte der Beugungsfigur nichts, wohl aber bewirken sie, daß die Intensitätsverteilung in der Umgebung eines Beugungsmaximums unsymmetrisch wird, abgesehen von der bereits durch die übrigen Summenglieder bedingten Unsymmetrie.

Beschränken wir uns dementsprechend auf die nähere Untersuchung der Intensitätsverteilung für  $r > 0$ , d. h. der einen Hälfte der Beugungsfigur, so können wir — sofern in dem Frequenzgemisch keine Frequenzen  $\nu_j < 100$  auftreten — in erster Näherung von den durch die  $j$ -te Frequenz bedingten Summengliedern die Teilglieder mit  $(r + r_j)$  vernachlässigen, da sie wegen des im Nenner auftretenden Faktors  $(r + r_j)\pi$  bzw.  $\frac{1}{2}(r + r_j)\pi$  — wie schon erwähnt — verhältnismäßig klein werden. Wir erhalten so aus Formel (32), (34), (38), (39) und der zu (38) analogen Formel für den Fall 3b) die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} 1) \text{ Für } \int_{-X}^{+X} f(x) \exp(i k x \cos \alpha) dx \\ I_{\text{Pkt}}^{\text{Pkt}} \approx 2 X^2 \left( \sum_j q_j^2 \left( \frac{\sin(r - r_j)\pi}{(r - r_j)\pi} \right)^2 \right. \\ \left. + \sum_{\substack{j, h \\ (j \neq h)}} q_j q_h \cos(\Delta_j - \Delta_h) \frac{\sin(r - r_j)\pi}{(r - r_j)\pi} \frac{\sin(r - r_h)\pi}{(r - r_h)\pi} \right). \end{aligned} \quad (42)$$

2a) Für  $\int_{-X}^0 f(x) \exp(i k x \cos \alpha) dx$

$$I_{F\alpha R}^{\text{Pkt}} \approx \frac{1}{2} X^2 \left( \sum_j q_j^2 \left( \frac{\sin \frac{1}{2} (r - r_j) \pi}{\frac{1}{2} (r - r_j) \pi} \right)^2 + \sum_{\substack{j, h \\ (j \neq h)}} q_j q_h \cos(\Delta_j - \Delta_h + \frac{1}{2} [r_j - r_h] \pi) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} (r - r_j) \pi}{\frac{1}{2} (r - r_j) \pi} \frac{\sin \frac{1}{2} (r - r_h) \pi}{\frac{1}{2} (r - r_h) \pi} \right). \quad (43)$$

2b) Für  $\int_{-X}^0 f(x) \exp(i k x \cos \alpha) dx + \int_0^{+X} f(-x) \exp(i k x \cos \alpha) dx$

$$I_{F\alpha R}^{\text{Pkt}} \approx 2 X^2 \left( \sum_j q_j^2 \cos^2(\Delta_j - \frac{1}{2} [r - r_j] \pi) \left( \frac{\sin \frac{1}{2} (r - r_j) \pi}{\frac{1}{2} (r - r_j) \pi} \right)^2 + \sum_{\substack{j, h \\ (j \neq h)}} q_j q_h \cos(\Delta_j - \frac{1}{2} [r - r_j] \pi) \cos(\Delta_h - \frac{1}{2} [r - r_h] \pi) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} (r - r_j) \pi}{\frac{1}{2} (r - r_j) \pi} \frac{\sin \frac{1}{2} (r - r_h) \pi}{\frac{1}{2} (r - r_h) \pi} \right). \quad (44)$$

3a) Für  $\int_0^{+X} f(x) \exp(i k x \cos \alpha) dx$

$$I_{F\alpha R}^{\text{Pkt}} \approx \frac{1}{2} X^2 \left( \sum_j q_j^2 \left( \frac{\sin \frac{1}{2} (r - r_j) \pi}{\frac{1}{2} (r - r_j) \pi} \right)^2 + \sum_{\substack{j, h \\ (j \neq h)}} q_j q_h \cos(\Delta_j - \Delta_h - \frac{1}{2} [r_j - r_h] \pi) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} (r - r_j) \pi}{\frac{1}{2} (r - r_j) \pi} \frac{\sin \frac{1}{2} (r - r_h) \pi}{\frac{1}{2} (r - r_h) \pi} \right). \quad (45)$$

3b) Für  $\int_{-X}^0 f(-x) \exp(i k x \cos \alpha) dx + \int_0^{+X} f(x) \exp(i k x \cos \alpha) dx$

$$I_{F\alpha R}^{\text{Pkt}} \approx 2 X^2 \left( \sum_j q_j^2 \cos^2(\Delta_j + \frac{1}{2} [r - r_j] \pi) \left( \frac{\sin \frac{1}{2} (r - r_j) \pi}{\frac{1}{2} (r - r_j) \pi} \right)^2 + \sum_{\substack{j, h \\ (j \neq h)}} q_j q_h \cos(\Delta_j + \frac{1}{2} [r - r_j] \pi) \cos(\Delta_h + \frac{1}{2} [r - r_h] \pi) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} (r - r_j) \pi}{\frac{1}{2} (r - r_j) \pi} \frac{\sin \frac{1}{2} (r - r_h) \pi}{\frac{1}{2} (r - r_h) \pi} \right). \quad (46)$$

Die vorstehenden Formeln zeigen also: In den sich bei den Anordnungen 1), 2a) und 3a) ergebenden Beugungsfiguren treten an den Stellen  $r = r_j$  oder genauer — wegen der Überlagerung durch die Doppelsumme sowie durch die übrigen Glieder der ersten Summe — in der Nähe der Stellen  $r = r_j$  Intensitätsmaxima auf, deren Höhe dem zugehörigen  $q_j^2$ , also dem Quadrat der zugehörigen Schwingungsamplitude proportional und von der Phase unabhängig ist.

Bei den Beugungsfiguren, die sich mit den Anordnungen nach 2b) und 3b) ergeben, treten gleichfalls in der Nähe der Stellen  $r = r_j$  „Intensitätsmaxima“ — cum grano salis — auf, die aber jetzt zu  $q_j^2 \cos^2 \Delta_j$  proportional sind und dementsprechend außer von der Amplitude der  $j$ -ten Teilfrequenz auch von deren

Phase in der Mitte des durchleuchteten Filmbereiches abhängen und gegebenenfalls — nämlich für  $\Delta_j = \frac{\pi}{2}$  oder  $3\frac{\pi}{2}$  — auch ganz verschwinden können.

Bei der vorstehenden Diskussion ist vorausgesetzt, daß zwei benachbarte Frequenzen des Frequenzgemisches einander nicht zu nahe benachbart sind, daß also zwei Ausdrücke  $(r - r_j)$  und  $(r - r_h)$  nicht gleichzeitig sehr klein sind. Denn nur unter dieser Voraussetzung durfte bei der Diskussion der vorstehenden Formeln die Doppelsumme gegenüber der einfachen Summe als klein vorausgesetzt werden. Trifft diese Voraussetzung nicht zu, ist also etwa für ein Wertepaar  $j, h$  die Größe  $(r_j - r_h)$  sehr klein, d. h. nur wenig von 0 verschieden, so kann sowohl für  $r = r_j$  als auch für  $r = r_h$  die Doppelsumme von der gleichen Größenordnung wie die einfache Summe werden, diese in ihrem Werte sogar an der Stelle, für die  $u$  den kleineren der beiden Werte annimmt, übertreffen.

Wir erkennen also — wie oben schon erwähnt —, daß man aus der Lage und der Intensität der Intensitätsmaxima — sofern diese nicht zu eng benachbart sind — im Falle der Anordnung 1) nur auf die Frequenzen  $\nu_j$  und die Amplituden  $q_j$  der im Frequenzgemisch enthaltenen Teilfrequenzen (näherungsweise) schließen kann, wobei sich die  $\nu_j$  aus den Formeln (33a) bis (33d), die  $q_j$  aus der Formel

$$q_j \approx \frac{1}{2X} \cdot \sqrt{2 \cdot I_{\max j}^{(1)}} \quad (47)$$

ergeben, während man aus den Beugungsfiguren, die sich mit den Anordnungen nach 2a) und 2b) bzw. nach 3a) und 3b) ergeben, außer den Frequenzen  $\nu_j$  und den Amplituden  $q_j$  auch die Phasen  $\Delta_j$  der im Frequenzgemisch enthaltenen Teilfrequenzen (näherungsweise) ermitteln kann, wobei sich die  $\nu_j$  wieder aus den Formeln (33a) bis (33d), die  $q_j$  aus der Formel

$$q_j \approx \frac{1}{X} \cdot \sqrt{2 \cdot I_{\max j}^{(2a) \text{ bzw. } 3a)}} = \frac{1}{X} \cdot \sqrt{2 \cdot I_{\max j}^{(1)}} \quad (48)$$

und die Phasen  $\Delta_j$  aus der Formel

$$Q_j = q_j \cos \Delta_j \approx \frac{1}{2X} \cdot \sqrt{2 \cdot I_{\max j}^{(2b) \text{ bzw. } 3b)}} = \frac{1}{2X} \cdot \sqrt{2 \cdot I_{\max j}^{(2)}} \quad (49)$$

ergeben. Für  $P_j = q_j \sin \Delta_j$  ergibt sich demnach

$$P_j = q_j \sin \Delta_j \approx \frac{1}{X} \cdot \sqrt{2 \cdot I_{\max j}^{(1)} - \frac{1}{2} I_{\max j}^{(2)}} \quad (50)$$

Die Formeln (48), (49) und (50) entsprechen den auf S. 126 des Abschnittes I des ersten Beitrages angegebenen Beziehungen für die dort durch  $a_n$  bzw.  $b_n$  bezeichneten Koeffizienten der Fourier-Entwicklung der vorgegebenen Funktion.

Wie oben S. 390 bereits erwähnt, sind die Ausdrücke (37) und (38), die sich für die Anordnung 2b) ergeben, Teilausdrücke der Formeln (35) bzw. (34), die für die Anordnung 2a) gelten. Entsprechend sind auch die für die Anordnung 3b) geltenden Ausdrücke Teilausdrücke der für die Anordnung nach 3a) erhaltenen Formeln. Wie man auf Grund der Beugungsfiguren nach Anordnung 2b) bzw. 3b) die Größe  $Q_j = q_j \cos \Delta_j$  erhält, ist es entsprechend prinzipiell auch möglich, die Anordnungen 2b) bzw. 3b) so umzugestalten, bzw. zwei Anordnungen 2c) und 3c) anzugeben, daß sie aus der Intensität ihrer Beugungslinien die Größe  $P_j = q_j \sin \Delta_j$  zu ermitteln gestatten. Es ist in diesem Fall nur notwendig, vor der einen Hälfte der durchleuchteten Öffnung, entweder vor derjenigen, die die eigentliche Schallaufnahme, oder vor derjenigen, die die spiegelbildliche

Schallaufzeichnung besitzt, eine „ $\frac{1}{2}$ -Wellenlängenplatte“ anzubringen, also eine Platte (aus Glas oder Glimmer oder einem anderen durchsichtigen Medium), die die Phase des Lichtes beim Durchgang um  $\frac{\lambda}{2}$  verändert. Man würde in diesem Fall für die Ausdrücke für  $I_{P,r,j,R}^{\text{Pkt}}$  gerade den anderen Teilausdruck der Anordnungen nach 2a) bzw. 3a) erhalten. Wir wollen hierauf aber nicht näher eingehen.

Wie in III schon erwähnt, kann — wegen der Doppeldeutigkeit der Wurzel in (29) — die Größe  $\cos \Delta_j$  bei Benutzung der Näherungsformeln nur ihrem absoluten Betrage nach bestimmt, die Phase  $\Delta_j$  also noch nicht eindeutig ermittelt werden.

An der einem Intensitätsmaximum entsprechenden Stelle  $r = r_j > 0$  lassen sich die Formeln (42) bis (46) in der gleichen Näherung wie vorstehend auch folgendermaßen schreiben:

Für die Anordnung nach 1)

$$I_{P,r,j,R}^{\text{Pkt}} \approx 2 X^2 \left( q_j + \sum_{(h \neq j)} q_h \cos (\Delta_j - \Delta_h) \frac{\sin (r_j - r_h) \pi}{(r_j - r_h) \pi} \right)^2. \quad (42a)$$

Für die Anordnung nach 2a)

$$I_{P,r,j,R}^{\text{Pkt}} \approx \frac{1}{2} X^2 \left( q_j + \sum_{(h \neq j)} q_h \cos (\Delta_j - \Delta_h + \frac{1}{2} [r_j - r_h] \pi) \frac{\sin \frac{1}{2} (r_j - r_h) \pi}{\frac{1}{2} (r_j - r_h) \pi} \right)^2. \quad (43a)$$

Für die Anordnung nach 2b)

$$I_{P,r,j,R}^{\text{Pkt}} \approx 2 X^2 \left( q_j \cos \Delta_j + \sum_{(h \neq j)} q_h \cos (\Delta_h - \frac{1}{2} [r_j - r_h] \pi) \frac{\sin \frac{1}{2} (r_j - r_h) \pi}{\frac{1}{2} (r_j - r_h) \pi} \right)^2. \quad (44a)$$

Für die Anordnung nach 3a)

$$I_{P,r,j,R}^{\text{Pkt}} \approx \frac{1}{2} X^2 \left( q_j + \sum_{(h \neq j)} q_h \cos (\Delta_j - \Delta_h - \frac{1}{2} [r_j - r_h] \pi) \frac{\sin \frac{1}{2} (r_j - r_h) \pi}{\frac{1}{2} (r_j - r_h) \pi} \right)^2. \quad (45a)$$

Für die Anordnung nach 3b)

$$I_{P,r,j,R}^{\text{Pkt}} \approx 2 X^2 \left( q_j \cos \Delta_j + \sum_{(h \neq j)} q_h \cos (\Delta_h + \frac{1}{2} [r_j - r_h] \pi) \frac{\sin \frac{1}{2} (r_j - r_h) \pi}{\frac{1}{2} (r_j - r_h) \pi} \right)^2. \quad (46a)$$

Während in den Formeln (42) bis (46) der Index  $j$  als Summationsindex gewählt war, ist in den Formeln (42a) bis (46a) durch  $r_j$  ein bestimmter Wert unter den den verschiedenen Frequenzen des Frequenzgemisches entsprechenden Hauptmaximis bezeichnet worden. Außerdem ist in den Formeln (42a), (43a) und (45a) noch — über die in den Formeln (42) bis (46) vorgenommenen Vernachlässigungen hinaus — das Quadrat eines Summenausdrucks vernachlässigt worden, dessen Glieder sich von der jeweils hingeschriebenen Summe nur dadurch unterscheiden, daß statt des  $\cos$ -Faktors der  $\sin$ -Faktor vom gleichen Argument zu nehmen ist. Konsequenterweise haben wir dann bei Ausführung der Quadrierung der eckigen Klammern auch das hierbei auftretende Quadrat der hingeschriebenen Summenausdrücke zu vernachlässigen, während wir das bei der Quadrierung auftretende doppelte Produkt im allgemeinen noch zu berücksichtigen haben.

Die vorerwähnte Vernachlässigung des Quadrats des bzw. der Summenausdrücke ist natürlich nur gestattet, wenn die im Nenner auftretenden Differenzen



$(r_j - r_h)$  genügend groß sind, und auch dann nur, wenn keiner der unter der Summe auftretenden  $q_h$ -Werte groß ist gegen den für die speziell betrachtete ( $r = r_j$ ) Stelle geltenden  $q_j$ -Wert.

#### V. Anwendung der Formeln des Abschnitts IV auf ein Frequenzgemisch mit bestimmten gegenseitigen Phasenbeziehungen $\Delta_j$

Im Anschluß an die theoretischen Untersuchungen des Abschnittes IV werde nunmehr die optische Schallanalyse eines bestimmten Frequenzgemisches nach den verschiedenen Methoden, die in Abschnitt IV erwähnt waren, zahlenmäßig durchgerechnet. Es werde dementsprechend vorausgesetzt, daß die einzelnen Frequenzen des zu analysierenden Frequenzgemisches an der Stelle, die von der optischen Achse des Beobachtungsfernrohrs getroffen wird, bestimmte Phasendifferenzen aufweisen. Es werde folgendes Frequenzgemisch den Untersuchungen zugrunde gelegt<sup>a)</sup>:

|           | $j =$        | 1                  | 2                  | 3         | 4                 | 5                 |
|-----------|--------------|--------------------|--------------------|-----------|-------------------|-------------------|
| Frequenz  | $\nu_j =$    | 1504               | 1580               | 1680      | 2280              | 2400              |
| Amplitude | $q_j =$      | 40                 | 60                 | 90        | 50                | 100               |
| Phase     | $\Delta_j =$ | $0,8\pi$<br>(144°) | $1,2\pi$<br>(216°) | 0<br>(0°) | $0,5\pi$<br>(90°) | $0,2\pi$<br>(36°) |
|           | $r_j =$      | 47                 | 49,375             | 52,5      | 71,25             | 75                |

Als Phase ist hier der Phasenwert der einzelnen Schwingung angegeben, den diese an der zuvor erwähnten Bezugsstelle, dem Durchstoßungspunkt der Filmaufzeichnung mit der optischen Achse der Untersuchungsapparatur, besitzt.

Wie aus den Formeln (32) u. f. des Abschnitts IV folgt, ergibt sich die durch Beugung an der Schallaufzeichnung erhaltene Lichtverteilung durch Bildung zweier Summen, die zu quadrieren und deren Quadrate anschließend zu addieren sind. Die Einzelsummanden jeder dieser Summen sind je von Frequenz, Amplitude und Phase einer der Teilschwingungen abhängig und stellen sich je als eine Schwingungskurve dar, die ihr Hauptmaximum näherungsweise an der Stelle  $r_j = \frac{2X}{L} \nu_j$  hat. Hierin ist wieder — wie bei dem in Abschnitt II behandelten Beispiel —  $2X = 10$  mm und  $L = 320$  mm sec<sup>-1</sup> gesetzt.  $r_j$  hat für das vorliegende Frequenzgemisch folgende Werte:

| $j =$   | 1  | 2      | 3    | 4     | 5  |
|---------|----|--------|------|-------|----|
| $r_j =$ | 47 | 49,375 | 52,5 | 71,25 | 75 |

Aus den  $r$ -Werten der Intensitätsmaxima der Beugungsfigur ergeben sich also die Frequenz-Werte zu  $\nu_j = 32 r_j$ . Wie auf Seite 389 des Abschnittes IV bereits ausführlich angegeben wurde, lassen sich die Frequenzen des Frequenzgemisches auch aus dem linearen Achsenabstand  $l$  der Linien maximaler Intensität in der Brennebene des Beobachtungsfernrohrs, dessen Brennweite  $= f$  sei, nach der Formel (33d)  $\nu_j \approx \frac{320}{\lambda} \frac{l_j}{f}$  berechnen, wo noch  $\lambda$  die Wellenlänge des benutzten Lichtes ist.

Es wurde nun zunächst nach Formel (32) des Abschnittes IV die Intensitätsverteilung berechnet, die der Annahme entspricht, daß das Frequenzgemisch in

<sup>a)</sup> Wobei wieder von dem Vorhandensein einer „Null-Frequenz“ in der Schallaufzeichnung abgesehen, also angenommen werde, daß die Aufzeichnung des akustischen Frequenzgemisches nach dem Gegentakt-Verfahren vorgenommen sei. — Auf die Wirkung einer in der Schallaufzeichnung vorhandenen Null-Frequenz soll in einem späteren Beitrag eingegangen werden.



der bisher üblichen Weise zur Schallanalyse benutzt wurde (Abb. 6). Diese als „Anordnung 1“ bezeichnete Methode ergibt bei dem vorliegenden Frequenzgemisch folgende Frequenzen mit den zugehörigen Amplituden: ( $q_j = \sqrt{I_{\max j}}$ )

|           |      |      |      |      |      |      |       |      |      |      |
|-----------|------|------|------|------|------|------|-------|------|------|------|
| $r_j =$   | 47   | 48,2 | 49,3 | 51   | 52,5 | 54   | 71,25 | 73,5 | 75,1 | 76,5 |
| $\nu_j =$ | 1504 | 1542 | 1578 | 1632 | 1680 | 1728 | 2280  | 2352 | 2403 | 2448 |
| $q_j =$   | 45   | 18   | 63   | 15   | 89,5 | 22   | 47    | 17   | 97,2 | 23   |

In vorstehender Zusammenstellung sind die eingekastelten Werte diejenigen, die dem tatsächlichen Frequenzgemisch entsprechen, während die nicht eingekastelten Werte den Nebenmaxima der Intensitätsverteilung entsprechen und fälschlicherweise das Vorhandensein von zusätzlichen Frequenzen im Frequenzgemisch vortäuschen. Man erkennt auch hier wieder — wie in Abschnitt II bereits betont —, daß diese vorgetäuschten Frequenzen noch mit einer scheinbaren Amplitude von der Größenordnung 20 behaftet sind, daß also evtl. im Frequenzgemisch vorhandene Frequenzen, deren Amplituden gleichfalls nur von dieser Größenordnung sind, bei der Schallanalyse von den vorgetäuschten Frequenzen nicht ohne weiteres unterschieden werden können.

Es sei aber bei dieser Gelegenheit schon darauf hingewiesen, daß doch eine Möglichkeit besteht, tatsächlich im Frequenzgemisch enthaltene Frequenzen geringer Amplitude von den durch Nebenmaxima vorgetäuschten Frequenzen zu unterscheiden, indem man zwei Analysierungen des Frequenzgemisches vornimmt, die sich dadurch unterscheiden, daß die Breite  $2X$  des zur Analyse benutzten Filmstreifens bei beiden Analysen verschiedene Werte besitzt. Denn da die Abstände der Nebenmaxima von den zugehörigen Hauptmaxima abhängig sind von der „Spaltbreite“, d. h. von der gewählten Breite  $2X$  des zur Analyse benutzten Filmstreifens, so errechnen sich aus den beiden Beugungsaufnahmen die „vorgetäuschten Frequenzen“ mit verschiedenen Frequenzwerten, während die tatsächlich vorhandenen Frequenzen sich aus beiden Aufnahmen mit dem gleichen Wert ergeben. Man hat so also die Möglichkeit, auch bei geringeren Amplituden zwischen den wirklich vorhandenen Frequenzen und den nur vorgetäuschten Frequenzen zu unterscheiden.

Aus dieser Aufnahme nach Anordnung 1 lassen sich die Phasen des Frequenzgemisches noch nicht erkennen.

Es wurde weiter die Berechnung für die Analyse nach Anordnung 2a und 2b durchgeführt. Bei der Anordnung 2a handelt es sich darum, daß für die Analyse nur die Hälfte der zu analysierenden Schallaufnahme benutzt wurde, und zwar in den Grenzen  $-X \leq x \leq 0$ , während bei der Anordnung 2b diese für Anordnung 2a benutzte Schallaufnahme spiegelbildlich daneben kopiert war und für die Analyse so die Schallaufnahme  $f(x)$  in den Grenzen  $-X \leq x \leq 0$  und gleichzeitig  $f(-x)$  in den Grenzen  $0 \leq x \leq +X$  benutzt wurde.

Die beiden Kurvendarstellungen Abb. 6 und 7 zeigen die sich hierbei ergebenden Intensitätsverteilungen. Von besonderem Interesse ist die Aufzeichnung nach Anordnung 2b. Bei dieser Anordnung hat man nun nicht auf die Lage der Intensitätsmaxima und die zugehörigen Intensitätswerte zu achten, sondern auf die Intensität an den Stellen, die lagemäßig den aus der ersten Analyse nach Anordnung 1 (oder nach Anordnung 2a) ermittelten Teilfrequenzen entsprechen. Da indessen bei der Anordnung 2a, bei der wegen der geringeren Breite des benutzten Filmstreifens die Überlagerung der benachbarten Teilfrequenzen wesentlich stärker in Erscheinung tritt, die Genauigkeit der Analyse herabgesetzt ist, ist es vorteilhaft, zur Bestimmung der Phase die Aufzeichnung nach Anordnung 1 und nach Anordnung 3b gemeinschaftlich zu benutzen.

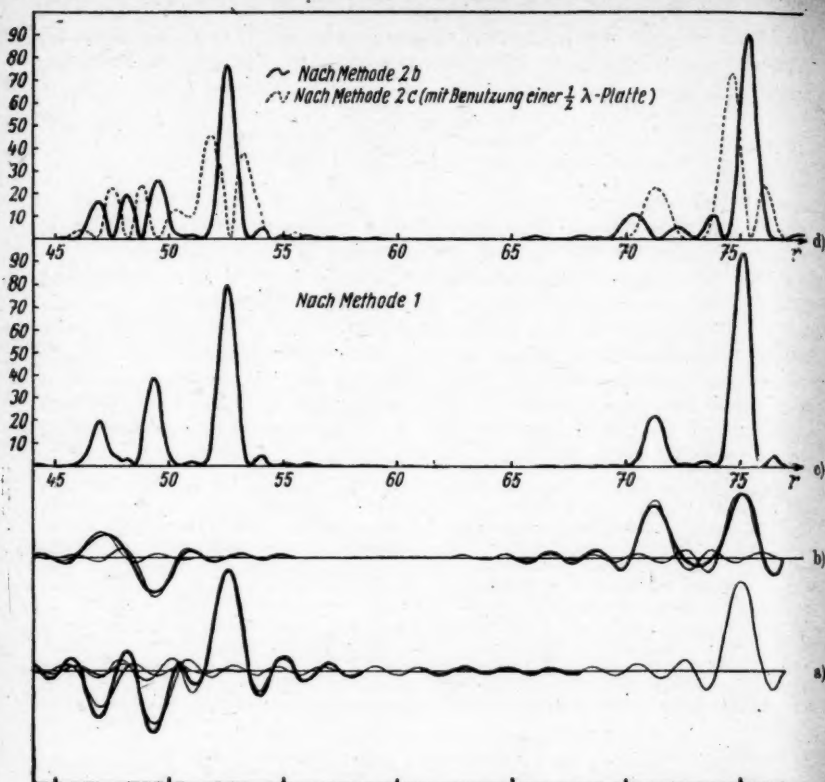


Abb. 6. In a) geben die dünn gezeichneten Kurven die (optischen) Amplituden (mit  $r$  als Abszisse), die den Summanden der ersten  $\sum_j$  der Gl. (32) entsprechen. — In b) sind (gleichfalls in Abhängigkeit von  $r$ ) die Amplituden dargestellt, die den Summanden der zweiten  $\sum_j$  der Gl. (32) entsprechen. Diese Kurven sind jeweils (nur) bis zu den (genügend kleinen) Amplituden gezeichnet, die sich intensitätsmäßig nicht mehr bemerkbar machen. — Die in a) bzw. b) stark ausgezogene Kurve ergibt sich aus den zugehörigen dünn gezeichneten Kurven durch Überlagerung, also einfache arithmetische Zusammenfassung. Sie gibt daher (in Abhängigkeit von  $r$ ) die erste bzw. zweite  $\sum_j$  der Gl. (32).

Durch Quadrieren und anschließendes Summieren der stark gezeichneten Kurven a) und b) ergibt sich die in c) gezeichnete Kurve der Intensitätsverteilung  $I_{r\alpha R}^{\text{Pkt}} (= I_{r\frac{\lambda}{2R}}^{\text{Pkt}})$  nach Gl. (32) der Analyse nach Methode 1. — In d) ist noch (als ausgezogene Kurve) das Quadrat der in Abb. 7a graphisch ermittelten resultierenden Amplitudenkurve, entsprechend Gl. (38) also  $I_{r\alpha R}^{\text{Pkt}}$  der Analyse nach Methode 2b gezeichnet. — Die gestrichelte Kurve in d) ergibt sich durch Quadrieren der stark gezeichneten resultierenden Amplitudenkurve in Abb. 7b, stellt also nach den Bemerkungen auf S. 399  $I_{r\alpha R}^{\text{Pkt}}$  der Analyse nach Methode 2c dar. — Durch Überlagerung der beiden Kurven d) ergibt sich die Kurve Abb. 7c):

Entnehmen wir dementsprechend für diejenigen  $r$ -Werte, die in der Aufzeichnung nach Anordnung 1 die Lage der Hauptmaxima und dementsprechend die Frequenzwerte der im Frequenzgemisch enthaltenen Teilschwingungen angeben, die Intensitätswerte  $I$  der Aufzeichnung nach Anordnung 2b, so finden wir für

|                      |                 |                 |                 |                   |
|----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|
| $r_j = 47$           | 49,3            | 52,5            | 71,25           | 75,1              |
| die Intensitätswerte | 41 <sup>a</sup> | 50 <sup>a</sup> | 88 <sup>a</sup> | 0                 |
|                      |                 |                 |                 | 81 <sup>a</sup> . |

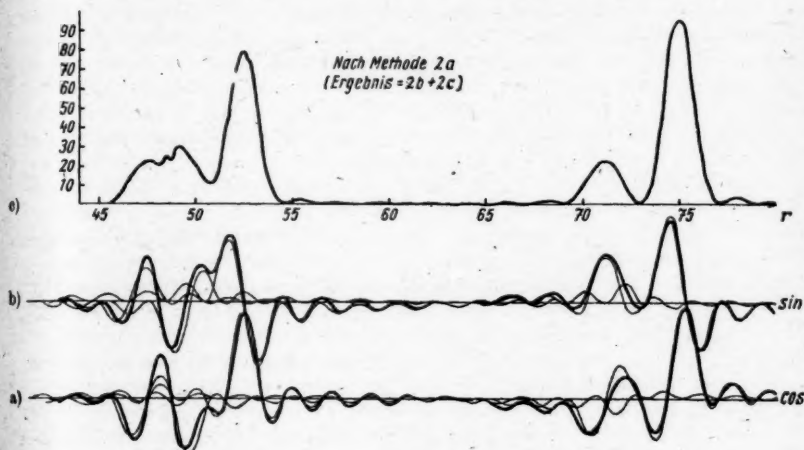


Abb. 7. In a) geben die dünn gezeichneten Kurven die (optischen) Amplituden (mit  $r$  als Abszisse), die den Summanden der ersten  $\sum$  der Gl. (34) entsprechen. — In b) sind — in Abhängigkeit von  $r$  — die Amplituden dargestellt, die den Summanden der zweiten  $\sum$  der Gl. (34) entsprechen. Diese Kurven sind jeweils (nur) bis zu den (genügend kleinen) Amplituden eingezeichnet, die sich intensitätsmäßig nicht mehr bemerkbar machen. Die (von  $r = 43$  bis  $r = 80$ ) durchgehende, stark ausgezogene Kurve in a) und b) ergibt sich durch Überlagerung der zugehörigen dünn gezeichneten Kurven, stellt also in a) die erste, in b) die zweite der resultierenden  $\sum$  der Gl. (34) dar. — Aus diesen beiden resultierenden Amplitudenschwingungen ergibt sich durch Quadrieren und anschließendes Summieren der quadrierten Kurven (die in c) gezeichnete Kurve, die dementsprechend die Intensitätsverteilung  $I_{\text{Pkt}}^{\text{Pkt}} (= I_{\text{Pkt}}^{\text{Pkt}} \frac{\lambda}{2\lambda, r})$  nach Gl. (34) für Methode 2a darstellt.

Da diese Intensitätswerte den Werten  $Q_j^2 = (q_j \cos \Delta_j)^2$  entsprechen, worin die  $q_j$  aus der Aufzeichnung nach Anordnung 1 (siehe die entsprechende Tabelle S. 397) zu entnehmen sind, so finden wir durch Kombination der  $Q_j$ -Werte mit den angegebenen  $q_j$ -Werten für  $\cos \Delta_j$  die Werte

$$\pm 0,912 \quad 0,795 \quad 0,985 \quad 0 \quad 0,832.$$

Hieraus ergeben sich für  $\Delta_j$  folgende Werte:

|              |      |      |      |      |      |
|--------------|------|------|------|------|------|
| $\Delta_j =$ | 24°  | 37°  | 10°  | 90°  | 34°  |
| oder         | 156° | 143° | 170° | 90°  | 146° |
| oder         | 204° | 217° | 190° | 270° | 214° |
| oder         | 336° | 323° | 350° | 270° | 326° |

Vergleichen wir diese mit den Soll-Werten der Phasen  $\Delta_j$ ,

$$144^\circ \quad 216^\circ \quad 0^\circ \quad 90^\circ \quad 36^\circ,$$

so erkennen wir, daß — worauf schon in Abschnitt IV hingewiesen wurde — die Phasen durch die Methode nach Anordnung 2b nicht die Intensitätsmaxima selbst werden können, daß dies aber nur mit der Einschränkung gilt, daß je vier Werte existieren, von denen nur einer dem wirklichen Phasenwert entsprechen kann.

Wie schon erwähnt, dürfen also zur Bestimmung der Phasenwerte aus der Intensitätsverteilung nach Anordnung 2b nicht die Intensitätsmaxima selbst benutzt werden, da diese sowohl ihrer Lage als auch ihrer Intensität nach zu prinzipiell falschen Ergebnissen führen müssen, was man besonders deutlich daran erkennt, daß dem Werte  $r = 71,25$  hier — und zwar richtig — der Intensitätswert 0 entspricht, während der Wert  $r = 71,25$  von zwei Intensitätsmaxima an den Stellen  $r = 72,25$  und  $r = 70,4$  benachbart ist.

Um zwischen den vier Werten, die sich für jedes  $\Delta_j$  ergeben, entscheiden zu können, müßte das Analysierverfahren noch weiter vervollständigt werden. Eine solche Vervollständigung scheint mir möglich zu sein, indem man die eine Hälfte der Schallaufzeichnung bei der Analysierung mit einer durchsichtigen dünnen Platte bedeckt, die das hindurchgehende Licht um einen ganz bestimmten, zahlenmäßig angebbaren Phasenwert ändert, und indem man die Analyse mit verschiedenen derartigen Phasenplatten mehrfach wiederholt. Diese Verbesserungsmöglichkeiten zur eindeutigen Bestimmung der Phasenwerte müssen indessen noch näher untersucht werden.

Für den Fall, den wir bereits im Abschnitt IV erwähnten und durch Anordnung 2c bezeichneten, bei dem etwa die spiegelbildliche Hälfte der Aufzeichnung mit einer durchsichtigen  $\frac{1}{2}\lambda$ -Platte bedeckt ist, ist das Ergebnis der Intensitätsverteilung in der Zeichnung gestrichelt wiedergegeben. Man erkennt, daß jetzt die Lage der Intensitätsmaxima eine ganz andere ist als in der ausgezogenen Kurve, die der Anordnung 2b entspricht.

Entnimmt man der gestrichelten Kurve die Intensitätswerte an denjenigen Stellen  $r$ , die in der Kurve nach Anordnung 1 durch die Hauptmaxima gegeben sind, so sind die hier abgelesenen Werte gleich  $P_j^2 = q_j^2 \sin^2 \Delta_j$ . Mit Benutzung der aus der Kurve für Anordnung 1 ermittelten  $q_j$ -Werte erhalten wir dann die  $\sin \Delta_j$ -Werte (bis auf das Vorzeichen) und aus diesen  $\sin \Delta_j$ -Werten wieder je vier  $\Delta_j$ -Werte, die mit den nach Anordnung 2b ermittelten  $\Delta_j$ -Werten übereinstimmen (evtl. bis auf kleine Abweichungen). Die Benutzung einer  $\frac{1}{2}\lambda$ -Platte ermöglicht also noch nicht, unter den ermittelten vier  $\Delta_j$ -Werten eine engere Auswahl zu treffen. Dies ist auch verständlich, weil die Benutzung der  $\frac{1}{2}\lambda$ -Platte nur eine Phasenänderung von  $180^\circ$  bedeutet, eine solche Phasenänderung aber zwangsläufig wieder zu denselben  $\Delta_j$ -Werten führt. Es würde also, um eine Entscheidung unter den vier  $\Delta_j$ -Werten treffen zu können, notwendig sein, Platten mit anderen Phasenverzögerungen in den Strahlengang einzuschalten.

Es sei noch zum Schluß darauf hingewiesen, daß die Kurve nach Anordnung 2a die unmittelbare Überlagerung der beiden zu den Anordnungen 2b und 2c gehörenden Kurven ist, wie dies bereits in Abschnitt IV erwähnt wurde.

Potsdam-Griebnitzsee, Institut für Forschung, Entwicklung und Unterricht in Physik, Mathematik und Optik, und Potsdam-Sanssouci, Institut für theoretische Physik der Pädagogischen Hochschule.

(Bei der Redaktion eingegangen am 6. September 1951.)

## Über die zwei Strömungsfelder hinter einem Gabelstoß<sup>1)</sup>

Von W. Kofink

### Inhaltsübersicht

Wie früher<sup>2)</sup> gezeigt wurde, führt die mathematische Behandlung des Problems des gegabelten Verdichtungsstoßes in ebenen stationären Überschallströmungen auf eine algebraische Gleichung 6. Grads. Jede Wurzel dieser Gleichung ergibt — wenn sie noch gewisse Bedingungen erfüllt, um physikalisch sinnvoll zu sein — alle an Gabelstoß interessierenden Größen aus einer Reihe von Formeln, die in I § 1 zusammengestellt wurden. Wir ergänzen hier jene Betrachtung durch eine Behandlung des Strömungsfeldes hinter der Gabel. Hinter dem Hauptstoß und dem zweiten Nebenstoß existieren bekanntlich 2 Strömungsfelder gleicher Strömungsrichtung und gleichen Drucks, die jedoch durch eine Unstetigkeitslinie getrennt sind. Die beiden Strömungen unterscheiden sich ja in ihren Geschwindigkeiten, Dichten, Temperaturen, Querschnitten und Entropien. Um diese Größen noch in unseren Formalismus einzubeziehen, drücken wir die dimensionslosen Strömungsgeschwindigkeiten  $\omega_a$  bzw.  $\omega_{ab}$  und die Dichten  $\rho_a$  bzw.  $\rho_{ab}$  hinter dem Hauptstoß bzw. hinter dem 2. Nebenstoß  $b$  durch die bekannten, in I § 1 definierten Größen  $k, l, m$  des Strömungsfeldes vor dem Hauptstoß und durch die Wurzel  $x$  der in (I 14) aufgestellten algebraischen Gleichung 6. Grads für den vorderen Nebenstoß  $a$  aus. Dabei ergeben sich auch allgemeine Aussagen über die Quotienten der Dichten und Geschwindigkeiten in den beiden Strömungsfeldern, über die Verringerung des Raumbedarfs der Strömung durch Gabelbildung und über die Entropiedifferenz der zwei Strömungen. Schließlich wird in einem kleinen Anhang gezeigt, daß die Gleichung 6. Grads (I 14) im Grenzfall  $\kappa = \infty$  vollständig zerfällt. Diese Tatsache bildet vielleicht einen Anhaltspunkt für eine Darstellung der 6 Wurzeln der Gl. (I 14) im Allgemeinfall, z. B. als Potenzreihen in Potenzen von  $1-k$ .

### § 1. Über die Strömungsquerschnitte zu beiden Seiten der Trennungslinie

Betrachtet man zwei gleiche Strömungsquerschnitte  $F_1 = F_{1a}$  senkrecht zur Anströmrichtung vor dem Hauptstoß bzw. dem vorderen Nebenstoß  $a$  und zwei senkrecht zur gemeinsamen Abströmrichtung liegenden Querschnitte  $F_2$  bzw.  $F_{2b}$  nach dem Hauptstoß bzw. dem hinteren Nebenstoß  $b$ , in welche der Fluß aus  $F_1$  bzw.  $F_{1a}$  durch die Stöße übergeht, so fordert die Kontinuitätsgleichung die Erhaltung der pro Zeiteinheit stationär durchströmenden Massen. Daraus folgt die Gleichung

$$F_1 w_1 \rho_1 = F_{2b} w_{2b} \rho_{2b} = F_2 w_2 \rho_2.$$

<sup>1)</sup> Herrn Professor Dr. K. W. Meissner zum 60. Geburtstag am 15. Dezember 1951 in Dankbarkeit gewidmet.

<sup>2)</sup> W. Kofink, Ann. Physik (6), 9, 200 (1951). Hier mit I zitiert. In I § 1 u. § 6 findet man die Bedeutung aller Bezeichnungen.



Für den Quotienten der Strömungsquerschnitte hinter dem 2. Nebenstoß und dem Hauptstoß gilt also

$$\frac{F_{2b}}{F_1} = \frac{w_2 \varrho_{2b}}{w_{2b} \varrho_{2b}} = \frac{w_2 \varrho_2}{w_{2b} \varrho_{2b}}. \quad (1)$$

Da beide Faktoren  $w_2/w_{2b} \leq 1$  und  $\varrho_2/\varrho_{2b} \leq 1$  sind, so wirken sie gleichsinnig an der Querschnittsverminderung der Strömung hinter den Nebenstößen einer Gabel mit. Diese Querschnittsverringerung einer Strömung mit Gabelstoß gegenüber dem einfachen Stoß begünstigt die Bildung des Totwassers aus der Rückströmung einer Grenzschicht und die Strömungsablösung. Oder man kann umgekehrt schließen: Eine sich ausbildende Rückströmung in der Grenzschicht veranlaßt einen einfachen Verdichtungsstoß, durch Bildung einer Gabel der Rückströmung Platz zu schaffen.

Überzeugen wir uns davon, daß die beiden obigen Ungleichungen gelten unter Herleitung der algebraischen Ausdrücke für sie.

## § 2. Geschwindigkeits- und Dichtenverhältnis zu beiden Seiten der Trennungslinie

### A. Die Ungleichung $w_2/w_{2b} \leq 1$

Das Quadrat der dimensionslosen Abströmgeschwindigkeit  $w_{2b}^2$ , nach dem hinteren Nebenstoß ist nach I § 1

$$w_{2b}^2 = \frac{(l' - x')(1 + x') + (1 + kx')^2}{(1 + kl')(1 + x')}.$$

Die darin vorkommenden gestrichenen Größen lassen sich mit Hilfe der Formeln (I 6 und 7) durch  $l$ ,  $m$  und  $x$  ausdrücken:

$$l' - x' = \frac{l - m - (1 - l + km)x - x^2}{(1 + kx)[1 + (1 + k)x]}, \quad 1 + x' = \frac{1 + m + kx}{1 + (1 + k)x},$$

$$1 + kx' = \frac{1 + km + x}{1 + (1 + k)x}, \quad 1 + kl' = \frac{(1 + kl)(1 + x)}{(1 + kx)[1 + (1 + k)x]}.$$

Nimmt man noch die Formeln für das Quadrat der dimensionslosen Abströmgeschwindigkeit  $w_2^2 = [(l - m)(1 + m) + (1 + km)^2]/[(1 + kl)(1 + m)]$  hinter dem Hauptstoß hinzu, so findet man für das Verhältnis der Quadrate der beiden Abströmgeschwindigkeiten

$$\frac{w_{2b}^2}{w_2^2} = 1 + \frac{(1 - k)^2 m x (m - x) [1 + (1 + k)m]}{(1 + x)(1 + m + kx)[(l - m)(1 + m) + (1 + km)^2]}. \quad (2)$$

Für physikalisch sinnvolle Lösungen  $x$  des Problems des stationären gegabelten Verdichtungsstoßes bestehen die Bedingungen  $l \geq m \geq x \geq 0$ . Daher ist das zweite Glied auf der rechten Seite von Gl. (2) niemals negativ und die Geschwindigkeit hinter dem zweiten Nebenstoß  $w_{2b}$  ist größer oder gleich  $w_2$ , derjenigen hinter dem Hauptstoß. Nur in den Grenzfällen, in denen einer der Nebenstöße eine Machsche Linie ist, d. h. für  $x = 0$  und  $x = m$ , wird  $w_{2b} = w_2$ . Diese Grenzfälle bedeuten jedoch keine Gabeln, sondern einfache Stöße. Sie können ausgeschlossen werden.

B. Die Ungleichung  $\varrho_2/\varrho_{2b} \leq 1$ 

Der Quotient der Dichten in der Abströmung hinter dem zweiten Nebenstoß  $\varrho_{2b}$  und hinter dem Hauptstoß  $\varrho_2$  ist unter Beachtung von  $\varrho_1 = \varrho_{1a}$ ,  $\varrho_{2a} = \varrho_{1b}$  nach I § 1:

$$\frac{\varrho_{2b}}{\varrho_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \frac{\varrho_{2a}}{\varrho_{1a}} \cdot \frac{\varrho_{2b}}{\varrho_{1b}} = \frac{1+x}{1+m} \cdot \frac{1+km}{1+kx} \cdot \frac{1+m+kx}{1+km+x}.$$

Wegen der Übereinstimmung der Drucke in den beiden Abströmefeldern ist er nebenbei gleich dem reziproken Quotienten der Temperaturen, nämlich

$$\frac{\varrho_{2b}}{\varrho_2} = \frac{T_2}{T_{2b}} = 1 + \frac{k(1-k)mx(m-x)}{(1+m)(1+kx)(1+km+x)}. \quad (3)$$

Dieser Quotient hängt (nur) implizite von  $l$  ab, da  $x$  eine Funktion von  $k, l, m$  ist. Das zweite Glied auf der rechten Seite von Gl. (3) ist niemals negativ, wenn man zu den unter A erwähnten Voraussetzungen noch die Bedingung  $0 \leq k < 1$  d. h.  $1 \leq \kappa < \infty$  hinzunimmt. Sie ist für physikalische Probleme immer erfüllt. Außer in den oben erwähnten Grenzfällen ist also  $\varrho_2/\varrho_{2b} < 1$ .

## § 3. Allgemeine Betrachtung des Dichtenverhältnisses.

Das letzte Ergebnis wollen wir noch auf einem direkteren Wege ohne Benützung der algebraischen Ausdrücke für  $\varrho_{2b}$  als Funktion von  $l, m, x$  ableiten.  $x$  wurde in Gl. (3) nicht näher spezifiziert, es ist eine Wurzel der Gl. (I 14), die aus der ersten Gabelbedingung  $\delta = \delta_a + \delta_b$  (I 1) hervorgeht. Diese Eigenschaft von  $x$  spielt aber bei der Ableitung der Ungleichung § 2 B noch keine Rolle. Also muß die zweite Gabelbedingung  $\Pi = \Pi_a \cdot \Pi_b$  (I 2) ausreichen, um  $\varrho_{2b} \geq \varrho_2$  zu beweisen. Bedeuten

$$\Pi_a = \frac{(\varrho_{2a}/\varrho_1) - k}{1 - k(\varrho_{2a}/\varrho_1)}, \quad \Pi_b = \frac{(\varrho_{2b}/\varrho_{2a}) - k}{1 - k(\varrho_{2b}/\varrho_{2a})}, \quad \Pi = \frac{(\varrho_2/\varrho_1) - k}{1 - k(\varrho_2/\varrho_1)}$$

die Druckverhältnisse (Quotienten des Druckes hinter dem Stoß durch den vor dem Stoß) als Funktionen der Dichtenverhältnisse für die drei Stöße der Gabel, so ergibt die zweite Gabelbedingung eine Gleichung für die Dichtenverhältnisse. Sie lautet, nach  $\varrho_{2b}/\varrho_2$  aufgelöst

$$\frac{\varrho_{2b}}{\varrho_2} = \frac{1 - \frac{k}{1-k+k^2} \left( \frac{\varrho_1}{\varrho_2} + \frac{\varrho_{2a}}{\varrho_1} - \frac{\varrho_{2a}}{\varrho_2} \right)}{1 - \frac{k}{1-k+k^2} \left( \frac{\varrho_2}{\varrho_1} + \frac{\varrho_1}{\varrho_{2a}} - \frac{\varrho_1}{\varrho_{2a}} \right)}. \quad (4)$$

Dabei bedeutet  $\varrho_1$  die Dichte in der Anströmung,  $\varrho_2$  in der Abströmung hinter dem Hauptstoß,  $\varrho_{2a}$  zwischen den Gabeln und  $\varrho_{2b}$  hinter dem zweiten Nebenstoß. Um zu zeigen, daß  $\varrho_{2b} \geq \varrho_2$  ist, muß man beweisen, daß der Klammerausdruck im Nenner des Bruches auf der rechten Seite von Gl. (4) größer oder gleich dem Klammerausdruck im Zähler ist. Dies geschieht in folgender Weise: Die Dichte  $\varrho_{2a}$  zwischen den Nebenstößen liegt immer zwischen den Dichten  $\varrho_1$  vor und  $\varrho_2$  hinter dem Hauptstoß, denn der erste Nebenstoß kann höchstens die Stärke des Hauptstoßes haben; d. h. es besteht die Ungleichung  $\varrho_1 \leq \varrho_{2a} \leq \varrho_2$ . Dann ist aber das Produkt  $(\varrho_2 - \varrho_{2a})(\varrho_{2a} - \varrho_1) \geq 0$ . Multipliziert man es mit der positiven Größe  $\varrho_2 - \varrho_1$ , so bleibt  $(\varrho_2 - \varrho_{2a})(\varrho_{2a} - \varrho_1)(\varrho_2 - \varrho_1) \geq 0$ . Ausmultiplizieren führt zu

$$\varrho_2^2 \varrho_{2a} + \varrho_1^2 \varrho_2 - \varrho_1 \varrho_2^2 \geq \varrho_2^2 \varrho_{2a} + \varrho_2 \varrho_{2a}^2 - \varrho_1 \varrho_{2a}^2$$



und nach Division durch das positive Produkt  $\varrho_1 \varrho_2 \varrho_{2a}$  entsteht die gesuchte Ungleichung

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} + \frac{\varrho_1}{\varrho_{2a}} - \frac{\varrho_2}{\varrho_{2a}} \geq \frac{\varrho_1}{\varrho_2} + \frac{\varrho_{2a}}{\varrho_1} - \frac{\varrho_{2a}}{\varrho_2}. \quad (5)$$

Wenn man schließlich die Ungleichung (5) in der Form

$$\left\{ \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \left( \frac{\varrho_{2a}}{\varrho_1} - 1 \right) + 1 \right\} : \left( \frac{\varrho_{2a}}{\varrho_1} \right) \geq \left\{ \frac{\varrho_{2a}}{\varrho_1} \left( \frac{\varrho_2}{\varrho_1} - 1 \right) + 1 \right\} : \left( \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \right)$$

schreibt, so erkennt man, daß beide Seiten, d. h. die Klammerausdrücke im Zähler und Nenner von Gl. (4), positiv sind. Schließlich überzeugt man sich z. B. durch Betrachtung der Ausdrücke I §. 1 b, c für die Dichtequotienten  $\varrho_2/\varrho_1$  und  $\varrho_{2a}/\varrho_1$ , zusammen mit der Ungleichung  $\varrho_{2a} \leq \varrho_2$ , daß  $\frac{\varrho_2}{\varrho_1} + \frac{\varrho_1}{\varrho_{2a}} - \frac{\varrho_2}{\varrho_{2a}} \leq \frac{1}{k} + k - 1 = \frac{1-k+k^2}{k}$  als Voraussetzung für diesen einfachen Beweis erfüllt ist. Damit ist  $\varrho_{2b} \geq \varrho_2$  vollständig bewiesen.

Der Quotient der Strömungsquerschnitte ist also  $F_{2b}/F_2 \leq 1$ . Man erhält ihn durch Einsetzen von  $\omega_{2b}/\omega_2$  aus Gl. (2) und  $\varrho_{2b}/\varrho_2$  aus Gl. (3) in Gl. (1). Geschwindigkeit und Dichte hinter dem zweiten Gabelstoß liegen höher als die entsprechenden Größen hinter dem Hauptstoß als Folge der geringeren Stoßstärke der Nebensterboße.

#### § 4. Die Entropiedifferenz der Strömungsfelder zu beiden Seiten der Trennungslinie

Wegen der zweiten Gabelbedingung  $\Pi = \Pi_a \cdot \Pi_b$  ist die Entropiedifferenz  $\Delta S$  der Abströmungen hinter dem Hauptstoß und hinter dem zweiten Nebensterboß nur eine Funktion des Dichtequotienten beider Strömungsfelder. Führt man Druck- und Dichtenverhältnis in den Ausdruck für das Drosselverhältnis  $D$  (I § 1) z. B. des Hauptstoßes ein, so wird

$$D = (\varrho_2/\varrho_1)^{\frac{1+k}{2k}} \Pi^{-\frac{1-k}{2k}}.$$

Daraus folgt die Entropievermehrung im Hauptstoß

$$\Delta S = -A R \ln D = -A R \left( \frac{1+k}{2k} \ln \frac{\varrho_2}{\varrho_1} - \frac{1-k}{2k} \ln \Pi \right). \quad (6)$$

Analoge Ausdrücke gelten für die Nebensterboße. Die Differenz der Entropieerhöhungen beim Durchgang durch den Hauptstoß gegenüber den Durchgängen durch die beiden Nebensterboße  $a$  und  $b$  ist

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S - (\Delta S_a + \Delta S_b) = -A R \left( \frac{1+k}{2k} \ln \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \frac{\varrho_1}{\varrho_{2a}} \frac{\varrho_{2a}}{\varrho_{2b}} - \frac{1-k}{2k} \ln \frac{\Pi}{\Pi_a \Pi_b} \right) \\ &= A R \frac{1+k}{2k} \ln \frac{\varrho_{2b}}{\varrho_2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Das Druckglied in dieser Gleichung verschwindet wegen der zweiten Gabelbedingung. In § 1 b ergab sich  $\varrho_{2b}/\varrho_2 \geq 1$ , also wird  $\Delta S \geq 0$ ; die Entropie des Strömungsfeldes hinter dem Hauptstoß ist um  $\Delta S$  größer als die hinter dem zweiten Nebensterboß. Wie dort gilt das Gleichheitszeichen nur für die beiden Grenzfälle

$x = 0$  und  $x = m$ .  $\varrho_{2b}/\varrho_2$  entnimmt man als Funktion von  $k, l, m, x$  aus Gl. (3). Wenn dieser Quotient nahezu 1 ist, wird näherungsweise

$$\Delta S \approx A R \frac{1-k^2}{2} \frac{m x (m-x)}{(1+m)(1+kx)(1+km+x)}. \quad (8)$$

Wie  $\varrho_{2b}/\varrho_2$  hängt  $\Delta S$  (nur) implizite über  $x$  als Funktion von  $k, l, m$  von  $l$  ab.

Für den Sonderfall maximaler Anströmgeschwindigkeit  $\omega_1 = \omega_{\max}$  (I § 6) vereinfacht sich der Ausdruck (7) für  $\Delta S$  in den 2 Fällen:

$$a) \text{ zu } \Delta S = A R \frac{1+k}{2k} \ln \frac{\mu+k\xi}{k\mu+\xi} \quad \text{und} \quad b) \text{ zu } \Delta S = A R \frac{1+k}{2k} \ln \frac{1+x}{1+kx}.$$

Die Bedingungen, bei denen diese beiden Fälle aneinander anschließen, sind  $\xi = 0$  für Fall a) und  $x = \infty$  für Fall b); an diesen Punkten wird

$$\Delta S = -A R \frac{1+k}{2k} \ln k.$$

### § 5. Anhang: Der Grenzfall $\kappa = \infty$

Der Grenzfall  $\kappa = \infty$  d. h.  $k = 1$  ist zwar nicht von physikalischem, aber von mathematischem Interesse. In diesem Grenzfall zerfällt nämlich die algebraische Gleichung (I 14), die Bestimmungsgleichung 6. Grads für  $x$ , in eine quadratische und 4 lineare Gleichungen. Zunächst verschwinden die Koeffizienten  $A_3$  und  $A_4$  von  $x^5$  und  $x^4$ , was eine Doppelwurzel  $x_1 = x_2 = \infty$  bedeutet. Die Gl. (I 14) reduziert sich auf eine Gleichung 4. Grads, die man in der Form

$$\{(1+l)(1+m)(1+2x)^2 - (l-m)(1+m)[3+4l+4(1+l)x] + (l-m)^2\} \times (1+x)^2 = 0$$

schreiben kann. Sie enthält somit die weitere Doppelwurzel  $x_3 = x_4 = -1$  und es bleibt die quadratische Gleichung

$$x^2 - (l-m-1)x + \frac{1}{4}[1 - (l-m)(3+4m)/(1+m)] = 0$$

übrig, deren Wurzeln

$$x_{5,6} = \frac{1}{2}(l-m-1) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(l-m+1)^2 - [(1+l)/(1+m)]}$$

sind. In diese Ausdrücke ( $x_1$  bis  $x_6$ ) gehen also die 6 Wurzeln der Gl. (I 14) über, wenn man  $k \rightarrow 1$  gehen läßt.

Karlsruhe, Institut für theor. Physik der Techn. Hochschule.

(Bei der Redaktion eingegangen am 6. September 1951.)

## Das klassische Modell der Quantentheorie

Von K. F. Novobatzky

### Inhaltsübersicht

Es wird eine neue Ableitung der Schrödingerschen Wellengleichung gegeben, die ohne Benutzung optischer Analogien im Rahmen der reinen Mechanik erfolgt. Die Betrachtungen zeigen, daß die Quantenmechanik sich nur durch die Einführung der antiklassischen Operatorenstatistik von der klassischen Mechanik scheidet.

Eine der Hauptaufgaben der statistischen Mechanik besteht in der Ermittlung jener virtuellen Gesamtheiten, die der Mittelwertbildung als Grundlage dienen. Es sind hauptsächlich die kanonischen und mikrokanonischen Mannigfaltigkeiten, mit denen sich die klassische Statistik befaßt.

Eine sehr bemerkenswerte Gesamtheit, die bisher übergangen wurde, wird durch die Hamilton-Jacobische Wirkungsfunktion  $S$  dargestellt. Beschränkt man sich auf den Massenpunkt, der sich unter der Einwirkung des Potentials  $V(x, y, z, t)$  bewegt, so lautet die Hamilton-Jacobische Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left\{ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right\} + V = 0. \quad (1)$$

Die vollständige Lösung ergibt sich in der Form  $S(x, y, z, t, a, b, c)$ , wo  $a, b, c$  unbestimmte Konstanten sind. Legt man ihre Werte irgendwie fest, so wird, wenn  $p$  den Impuls,  $v$  die Geschwindigkeit des Massenpunktes bedeutet, durch die bekannte Gleichung

$$p = \text{grad } S, \text{ oder } v = \frac{1}{m} \text{ grad } S(x, y, z, t) \quad (2)$$

ein Geschwindigkeitsfeld definiert. Denkt man sich die Orthogonaltrajektorien der Flächenschar  $S = \text{konst}$  mit gleichen Massenpunkten dicht bestreut, so erhält man das Bild einer inkohärenten, strömenden Flüssigkeit.  $\frac{1}{m} S(x, y, z, t)$  spielt die Rolle des Geschwindigkeitspotentials. Die Bewegung erfolgt wirbellos.

Es liegt nahe, auf diese Punktgesamtheit eine Statistik aufzubauen. Als Dichte  $\varrho$  wird man die Anzahl der Massenpunkte in der Volumeneinheit festsetzen und das Bestehen der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div } \varrho v = 0 \quad (3)$$

fordern. Es ist für das folgende ausschlaggebend, daß sich die zwei Hauptgleichungen (1) und (3) aus einem Variationsprinzip ableiten:

$$\delta \int \varrho \left\{ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + V \right\} dx dy dz dt = 0. \quad (4)$$

Variation von  $\rho$  ergibt die Gl. (1), Variation von  $S$ , wenn man (2) in Betracht zieht, die Kontinuitätsgleichung (3). Will man noch zum Ausdruck bringen, daß die Dichte eine wesentlich positive Größe ist, so kann man  $\rho = A^2$  schreiben ( $A$  reell) und vor den Integranden aus späteren Bequemlichkeitsrücksichten den Faktor 2 setzen. Das Variationsprinzip lautet dann

$$\delta \int L dx dy dz dt = 0,$$

mit der Lagrangefunktion

$$L = 2 A^2 \left\{ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + V \right\}. \quad (5)$$

Von einer Lagrangefunktion sind zwei Dinge zu verlangen. Sie muß eine Invariante sein und  $L dx dy dz dt$  muß die Dimension einer Wirkung haben. Beide Bedingungen sind erfüllt.  $S$  und  $A$  sind im Rahmen der nichtrelativistischen Mechanik invariante Größen, deren Dimensionen  $g \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$  resp.  $\text{cm}^{-3}$  sind.

Nun ist die Hauptschwierigkeit, die sich dem Aufbau einer Statistik entgegenstellt, näher ins Auge zu fassen. Je nach den Zahlenwerten, die man den in  $S$  auftretenden Konstanten  $a, b, c$  erteilt, wird die Strömung eine andere sein und man kann nicht erwarten, daß die zu bildenden Mittelwerte irgendeine allgemeine Aussage enthalten über eine Bewegung, deren einziges Datum das Potential  $V$  darstellt. Die Schwierigkeit wird beseitigt, wenn man für  $\rho$  nicht vollständige, sondern reguläre Lösungen fordert, wie es einer annehmbaren Statistik angemessen ist. Es läßt sich jedoch an der Hand eines einzigen Beispiels dartun, daß es sehr wohl Bewegungen gibt, die eine reguläre Dichte ausschließen. Man denke an den linearen Oszillator, der parallel der  $X$ -Achse schwingt. Bedeutet  $a$  die Amplitude,  $\omega$  die Kreisfrequenz,  $E$  die Energie des Oszillators, so errechnet sich die Wirkungskfunktion zu

$$S = \frac{E}{\omega} \left( \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right).$$

Die Flächen  $S = \text{konst}$  stehen senkrecht zur  $X$ -Achse, die Strömung der Punktgesamtheit erfolgt demnach in der  $X$ -Richtung. Die Punktmenge, die pro sec durch die Bodenfläche  $f$  einer Stromröhre tritt, erfüllt das Volumen  $f v_x$ . Die Geschwindigkeit  $v_x$  verringert sich gegen die Amplitudenendflächen hin stetig und wird dort Null. Die Punktmenge erfüllt einen stetig abnehmenden Raum, die Dichte wächst und wird an den Endflächen unendlich.

Man steht vor dem Dilemma, die Konzeption einer neuen Statistik fallen zu lassen, oder aber eine Erweiterung der klassischen Mechanik vorzunehmen. Als Schrödinger seinerzeit — in anderer Richtung vordringend — sich zu letzterem Schritte entschloß, dienten ihm optische Analogien zur Richtschnur. Das Heil kam, wie Planck sich ausdrückt, von der Seite der Optik. Hier jedoch möge das Gebiet der reinen Mechanik nicht verlassen werden. Die Möglichkeit einer klassischen Interpretation hängt damit zusammen. Das leitende Prinzip bestehe darin, die Lagrangefunktion (5), durch die die Gesamtheit beschrieben wird, im erlaubten Maße zu verallgemeinern. Sehr bemerkenswert ist, das die Verallgemeinerung ziemlich eindeutig, mit einem Minimum an Voraussetzungen durchgeführt werden kann.

Es ist klar, daß an den ersten vier Gliedern des Klammerausdruckes in (5) nichts geändert werden darf, soll durch die Variation von  $S$  die Kontinuitätsgleichung nicht zerstört werden. Die einzige zulässige Änderung besteht im Hinzufügen eines Zusatzgliedes  $Z$ , das aus demselben Grunde  $S$  nicht enthalten darf.

Die zum Aufbau von  $Z$  zur Verfügung stehenden Größen sind  $m$  und  $A$ . Aus dem Skalar  $A$  lassen sich folgende Invarianten bilden:  $|\text{grad } A|^2$ ,  $\Delta A$ ,  $|\text{grad } \Delta A|^2$ ,  $\Delta \Delta A$  usw. Die einfachste unter ihnen ist  $|\text{grad } A|^2$ , alle anderen führen zu Feldgleichungen, die von höherer als zweiter Ordnung sind. Das Zusatzglied hat daher folgende Gestalt:

$$Z = A^{n_1} (\text{grad } A)^{n_2} m^{n_3}. \quad (6)$$

Die Dimension von  $Z$  muß gleich  $g \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^{-2}$  sein, um mit  $dx dy dz dt$  multipliziert die geforderte Wirkungsdimension anzunehmen. Nun ist

$$[A] = \text{cm}^{-1}, |\text{grad } A|^2 = \text{cm}^{-2}, [m] = g.$$

Auf der rechten Seite von [6] fehlt ersichtlicherweise die Zeitdimension, die linkerseits auftritt. Man steht vor der unabweislichen Notwendigkeit, die rechte Seite mit einer universellen Konstante zu erweitern. Nun haben aber alle diese Konstanten außer dem Planckschen  $\hbar$  eine streng umschriebene Bedeutung und passen nicht hierher. Eine andere Wahl wäre schwerlich zu begründen. Wählt man  $\hbar$ , so lautet die Gl. (6) in Dimensionen geschrieben

$$g \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^{-2} = (g \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1})^{n_1} \text{cm}^{-1 n_2} \text{cm}^{-2 n_3} g^{n_3}.$$

Der Vergleich ergibt sofort

$$n_1 = 2, \quad n_2 = -1, \quad \frac{3}{2} n_1 + 5 n_2 = 5.$$

Schließt man ganz unwahrscheinliche Potenzen aus, so verbleibt als Lösung der letzten Gleichung  $n_1 = 0$ ,  $n_2 = 1$ . Man erhält daher

$$Z = \frac{\hbar^2}{m} \left\{ \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 \right\} \quad (7)$$

und die Lagrangefunktion wird

$$L = 2A^2 \left\{ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + V \right\} + \frac{\hbar^2}{m} \left[ \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

Die daraus entspringenden Eulerschen Gleichungen sind folgende:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta A}{A} = 0. \quad (9)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{m} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial S}{\partial z} \right) + \frac{1}{2m} A \Delta S = 0. \quad (10)$$

(10) stellt die Kontinuitätsgleichung, (9) die Hamilton-Jacobische Bewegungsgleichung dar. Der einzige Unterschied gegenüber (1) besteht darin, daß zum Potential  $V$  der äußeren Kräfte das von der Punktdichte abhängige Potential  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta A}{A}$  dazugetreten ist. Die fundamentalen Bewegungsgesetze haben keine Veränderung erfahren. Sie werden durch die charakteristischen Gleichungen von (9) zum Ausdruck gebracht

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta A}{A} \right)$$

und nach Elimination von  $\frac{\partial S}{\partial x}$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta A}{A} \right).$$

Es bleibt zu Recht bestehen, daß Maße mal Beschleunigung gleich der wirkenden Kraft ist, nur die Kraft selbst hat sich geändert. Während bei physikalischen Körpern zum Gradienten von  $V$  die Spannungsdivergenz hinzutritt, ist es hier ein Dichtepotential, dessen Gradient neue Kräfte hervorruft. Durch die vorgenommene Verallgemeinerung wurde eine Punktgesamtheit geschaffen, die sich nach klassischen Gesetzen bewegt und daher klassisch vollkommen verständlich bleibt. In Frage steht nur noch, ob das gewünschte Ziel erreicht ist, ob die Gl. (9) und (10) zu regulären Dichten führen. Man ist der Pflicht enthoben, dies rechnerisch nachzuweisen, denn faßt man die zwei unbekannten Funktionen  $A$  und  $S$  in der komplexen Funktion

$$\psi = A e^{\frac{i}{\hbar} S} \quad (11)$$

zusammen, so lassen sich die Bewegungsgleichung (9) und die Kontinuitätsgleichung (10) in der wohlbekannten Schrödingerschen Wellengleichung

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi = 0 \quad (12)$$

vereinigen. Führt man die hier angedeuteten Differentiationen an der Form (11) von  $\psi$  durch und setzt den reellen und imaginären Teil von (12) getrennt gleich Null, so erhält man gerade die Gln. (9) und (10). Von der Schrödingergleichung aber weiß man sehr wohl, daß sie reguläre Lösungen zuläßt. Die stationäre Schrödingergleichung ergibt sich aus der Bemerkung, daß, wenn  $V$  die Zeit nicht enthält,  $S$  die Form annimmt:  $S = -E t + S_0(x, y, z)$ . Das erste Glied in (12) wird dann  $-E \psi$ .

Die Punktdichte ergibt sich zu

$$\varrho = A^2 = \psi^* \psi. \quad (13)$$

Auch die Kontinuitätsgleichung (10) geht nach Multiplikation mit  $2A$  in die bekannte Form:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) + \operatorname{div} \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \psi^*) \quad (14)$$

über, wenn das aus (11) berechnete  $S = \frac{\hbar}{2i} \lg \frac{\psi}{\psi^*}$  eingesetzt wird. Die Interpretation von  $\psi^* \psi$  als Ortswahrscheinlichkeit und des Klammerausdruckes in (14) als Wahrscheinlichkeitsfluß braucht jetzt nicht mehr axiomatisch eingeführt zu werden, sondern folgt von selbst aus dem Strömungsbilde. Der richtige Sinn der Schrödingergleichung besteht nach dem Vorhergehenden darin, daß durch sie eine klassische Gesamtheit definiert wird, auf die sich ohne Bedenken eine Statistik gründen läßt.

Die Gl. (12) ist linear und homogen, sie kann als Operatorengleichung aufgefaßt werden. Der Vergleich mit (1) zeigt sofort die sich entsprechenden Größen und Operatoren an:

$$\frac{\partial S}{\partial t} \sim \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \text{ usw.} \quad V \sim V.$$

Jeder Versuch, die Linearität und Homogenität der Gleichung abändern zu wollen, würde dem Operatorenkalkül den Boden entziehen. Dieser Kalkül bildet jene scharfe Grenze, auf deren einer Seite der durchaus klassische statistische Körper, auf deren anderer die anticlassische Operatorenstatistik liegt. Wird  $\int \varrho^2 d\tau$  auf 1 normiert, so ist der klassische Mittelwert der Phasenfunktion  $F(x, p)$ :  $\bar{F} = \int \varrho^2 F d\tau$ ,



der quantentheoretische hingegen, wenn  $\Omega$  den der Funktion  $F$  entsprechenden Operator bedeutet:  $\bar{F} = \int \psi^* \Omega \psi d\tau$ . Wohl decken sich die beiden Mittelwerte für reine Ortsfunktionen, sogar auch die Mittelwerte einer beliebigen Impulskomponente, aber schon für die Mittel der zweiten Potenzen dieser Komponenten findet keine Übereinstimmung mehr statt.

Nach alledem ist klar, daß die Schrödingergleichung und alles, was mit ihr allein zusammenhängt, wie Energieeigenwerte, Störungsrechnung usw., klassisch verständlich bleibt, alles übrige hingegen, an dem auch der Operatorenkalkül beteiligt ist, in das Gebiet der spezifischen Quantentheorie fällt. So zum Beispiel ist die Austauscherscheinung beim  $H_2$ -Atom klassisch verständlich. Denn daß ununterscheidbare Teilchen zur Entartung führen, ist eine mathematische Tatsache, den Singulett- und Triplettzuständen aber ordnet die Störungsrechnung selbst die nichtkombinierenden Eigenfunktionen zu. Demgegenüber bleibt die Ungenauigkeitsrelation klassisch unverständlich, denn zu ihrer Herleitung spielt die Operatorenegalt der Impulses eine wesentliche Rolle.

Klar präzisiert wird der mystische Begriff „Zustand des Massenpunktes“. Daß der mechanische Zustand durch Orts- und Impulsangabe erschöpfend beschrieben wird, liegt im Begriffe des Massenpunktes selbst. Es hat sich der Brauch eingebürgert, die statistischen Aussagen der Gesamtheit auf den einzelnen Massenpunkt zu übertragen und demselben einen Zustand zuzuschreiben, der durch eine Begleitwelle  $\psi$  dargestellt wird. Nach der gegebenen Ableitung aber beschreibt  $\psi$  nicht die Bewegung eines einzelnen Punktes, sondern die der Gesamtheit. Der einzelne Massenpunkt wird durch keinerlei Welle begleitet, wie schon daraus erhellt, daß zum Zustandekommen der Welle das Zusatzglied  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta A}{A}$  erforderlich ist, das das Bestehen einer Punktdichte voraussetzt. Wollte man das auf einen kleinen Raum beschränkte Wellenpaket einem einzigen Teilchen zuordnen, so würde man sofort Scheinprobleme heraufbeschwören. Wird nämlich das solcherart definierte Wellenpaket an einem Potentialwall zum Teil reflektiert, zum Teil hindurchgelassen, so zeigen die Wellenfunktionen der zwei Teilpakete ein eigenartiges Verhalten. Für das erste ist  $\int \psi^* \psi d\tau_1$ , für das zweite  $\int \psi^* \psi d\tau_2$  Null oder 1, denn das Teilchen befindet sich ganz gewiß in einem bestimmten Paket, oder ganz gewiß nicht. Blickt man nun in das erste hinein und konstatiert dort die Anwesenheit des Teilchens, so wird für das zweite  $\int \psi^* \psi d\tau_2$  sofort zu Null und man kann sich den Kopf darüber zerbrechen, welche geheimnisvolle Wirkung von unserem Blicke ausging, die zeitlos, mit unendlicher Geschwindigkeit fortschreitend, die Wellenfunktion im zweiten Paket annulliert hat. Die legitime Auffassung ist wohl folgende: im ungeteilten Paket befindet sich nicht ein Teilchen, sondern die ganze Punktmenge des virtuellen statistischen Körpers. Den am Wall gültigen Grenzbedingungen gemäß verteilt sich diese Menge im Verhältnis  $N_1:N_2$  auf die beiden Teilpakete. Das aber hat eine sehr einfache Bedeutung. Fällt nicht ein Teilchen, sondern eine große Anzahl solcher auf den Wall, so sind statistische Aussagen am Platze und unser Ansatz bedeutet, daß die Zahl der hindurchgegangenen zu der der reflektierten im Verhältnis von  $N_1$  zu  $N_2$  steht. Das Scheinproblem ist verschwunden.

Es fragt sich noch, ob die rein statistische Auffassung der Quantenmechanik nur eine mögliche, oder aber eine zwingende ist. Die Antwort ist sehr einfach. Die Wellenfunktion ist immer komplex, die Zweiteilung der Schrödingerschen Gleichung in (9) und (10) gilt ohne Ausnahme. Diese zwei Gleichungen aber sind das mathematische Abbild der Punktgesamtheit, des statistischen Körpers.



Der Versuch, die Optik in gleicher Weise als Photonenstatistik betrachten zu wollen, verbietet sich von selbst. Die optische Wellenfunktion ist reell, eine Aufspaltung in reellen und imaginären Anteil entfällt und damit auch die Möglichkeit, eine Kontinuitätsgleichung, die sich auf die Teilchenanzahl bezieht, zu erhalten.

Genau derselbe Gedankengang, durch den die Schrödingergleichung (12) gewonnen wurde, führt auf relativistischem Gebiete zur Schrödinger-Gordon-schen Gleichung. Bedeuten  $x_1, x_2, x_3, x_4 = i c t$  die Koordinaten des Teilchens,  $\tau$  die Eigenzeit und  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$  die Komponenten des Viererpotentials, so lautet die Hamilton-Jacobische Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{1}{2m_0} \sum \left( \frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right)^2 = 0, \quad (15)$$

mit  $\frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{m_0 c^2}{2}$ . Die erste Gruppe der charakteristischen Gleichungen

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{1}{m_0} \left( \frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right)$$

definieren die Größen

$$\frac{1}{m_0} \left( \frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right) = u_i \quad (16)$$

als Komponenten der Vierergeschwindigkeit und führen mit der zweiten Gruppe vereint zu den Bewegungsgleichungen

$$m_0 \frac{d^2 x_i}{d\tau^2} = F_{ik} \frac{e}{c} u_k, \quad \left( F_{ik} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \right).$$

Multipliziert man die linke Seite von (15) mit  $2\varrho_0$ , so entsteht die Lagrange-funktion  $L$  und die Variation von  $S$  liefert die relativistische Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho_0 u_i}{\partial x_i} = 0.$$

Mit  $\varrho_0 = A^2$  und  $u_i = \frac{1}{m_0} \left( \frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right)$  nimmt sie die Form an

$$2 \frac{\partial A}{\partial x_i} \left( \frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right) + A \square S = 0. \quad (17)$$

Die Verallgemeinerung der Lagrangefunktion erfolgt jetzt durch Hinzufügung des Gliedes  $-\frac{\hbar^2}{m_0} \sum \left( \frac{\partial A}{\partial x_i} \right)^2$ . Neben der unveränderten Kontinuitätsgleichung erhält man dann an Stelle von (15) die Jacobische Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{1}{2m_0} \sum \left( \frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m_0} \square A = 0. \quad (15')$$

(15') und (17) vereinigen sich wie oben zur Schrödinger-Gordongleichung, wenn für  $\frac{\partial S}{\partial \tau}$  wieder  $\frac{m_0 c^2}{2}$  gesetzt wird.

Diese Gleichung wird verschiedentlich beurteilt. Es trifft sie einestails der Vorwurf, daß sie auch in der Zeitvariablen von zweiter Ordnung und deshalb inkorrekt ist. Andererseits hat es an Rehabilitierungsversuchen nicht gefehlt. Allgemein betrachtet man sie heute als die richtige Wellengleichung spinloser Teilchen.

Es ist nicht uninteressant, festzustellen, wie sie sich im Lichte der hier gegebenen Ableitung darstellt. Die charakteristischen Gln. (16) bleiben auch für die verall-

gemeinerte Gl. (15') bestehen. Daraus aber folgt auf Grund von  $\sum u_i^2 = -c^2$ , daß neben (15') auch die Gleichung

$$\frac{1}{2m_0} \sum \left( \frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right)^2 + \frac{m_0 c^2}{2} = 0 \quad (18)$$

bestehen müßte. Setzt man die Konstante  $\frac{\partial S}{\partial \tau}$  in der Form  $k + \frac{m_0 c^2}{2}$  an, so hätte man für die zwei unbekannten Funktionen  $A$  und  $S$  die drei Gleichungen  $k - \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\square A}{A} = 0$ , (18) und (17). Im allgemeinen Falle wird es keine Lösung geben.

Läßt man (18) außer Betracht und löst nur (15') und (17), d. h. die gewöhnliche Schrödinger-Gordongleichung, so betrachtet man eben nicht eine Punkt-mannigfaltigkeit, die sich mit Vierergeschwindigkeit bewegt. Die Gleichung rechnet mit den vier Geschwindigkeitskomponenten als unabhängigen Größen. Es ist daher nicht verwunderlich, daß sie auf das H-Atom angewandt, eine falsche Feinstruktur ergibt. Die ebenen Wellen des feldfreien Falles hingegen, mit  $A = \text{konst.}$ ,  $S = p_i x_i$  bedeuten eine strenge Lösung. Dies ist die theoretische Stütze für die gewöhnliche Forderung, daß iterierte Wellengleichungen erster Ordnung im feldfreien Falle in die Schrödinger-Gordongleichung übergehen mögen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die hier gegebene Ableitung der Schrödingergleichung einerseits innerhalb der Grenzen der Mechanik erfolgt, andererseits die Quantenmechanik als rein statistische Theorie kennzeichnet und jenes klassische Modell angibt, über das nach unklassischen Methoden gemittelt wird.

Budapest, Physikalisches Institut der Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 26. September 1951.)

## **Messungen der elektrischen Leitfähigkeit von CdS-Kristallen bei Bestrahlung durch Elektronen mittlerer Energie**

Von H. Benda

(Mit 6 Abbildungen)

### **Inhaltsübersicht**

Es wurde die durch Elektronenstrahl angeregte Leitfähigkeit von CdS-Kristallen untersucht, wobei die Spannung des Strahles zwischen 800 und 3000 V, seine Stromstärke zwischen 0,001 und  $10\mu\text{A}$  lag. Wie bei Lichtbestrahlung hängt die Leitfähigkeit von der Anregungsintensität durch eine einfache Potenzfunktion ab, deren Exponent zwischen 0,5 und 1 liegt. Im untersuchten Bereich zeigte ein bestimmter Kristall immer denselben Exponenten; insbesondere war der letztere unabhängig von Strahlspannung, Strahlstromstärke und von der Lage der bestrahlten Stelle zwischen den aufgedampften Elektroden, obwohl der Betrag der angeregten Leitfähigkeit bei Verschiebung des Strahles von der Spaltmitte zur Randzone vor einer Elektrode stark anstieg.

Der Gang der Leitfähigkeit mit der Strahlspannung ist komplizierter und scheint wesentlich durch den Abstand der Elektroden bestimmt zu sein. Die Quantenausbeute ist erheblich kleiner als bei Lichtquanten gleicher Eindringtiefe; sie kann für zwei Kristalle mit gleichen Dunkel- und Photoströmen auch ganz verschieden ausfallen. — Ferner wurde in grober Weise der Verlauf des Sekundäremissionskoeffizienten bestimmt.

### **Einleitung**

Die Leitfähigkeitseigenschaften von Cadmiumsulfid-Kristallen, die mit Elektronen sehr hoher Energie bestrahlt wurden, haben vor einigen Jahren Kallmann und Warminsky<sup>1)</sup> untersucht. Sie fanden bei Anregungsstromstärken von etwa  $10^{-13}$  A und Feldstärken von rund 1000 V/cm im Kristall „Verstärkungsfaktoren“ bis zu  $10^4$ . Die Strahlspannung wird von den Autoren nicht angegeben. Während sie mit einem radioaktiven Präparat arbeiteten, regte Eckart<sup>2)</sup> die Leitfähigkeit in CdS durch im Übermikroskop erzeugte Strahlen von 50 ... 90 kV an.

Es sollten nun die Verhältnisse bei der relativ kleinen Energie von 1 ... 3 kV untersucht werden. — Nach Abschluß dieser Messungen erschien eine ähnlich gerichtete Arbeit von Archangelskaja und Bontsch-Burjewitsch<sup>3)</sup>, in der das zeitliche Abklingen der Leitfähigkeit eines durch 2-kV-Elektronen angeregten CdS-Kristalles gemessen wird. Die zuletzt genannten Arbeiten<sup>2) 3)</sup> werden am Schluß diskutiert.

<sup>1)</sup> H. Kallmann u. R. Warminsky, Ann. Physik (6) 4, 69 (1949).

<sup>2)</sup> Bisher unveröffentlichte Messungen vom Jahre 1948.

<sup>3)</sup> W. A. Archangelskaja u. A. M. Bontsch-Burjewitsch, Abhandl. d. Akad. d. W. der UdSSR, Bd. LXXVII, 102, 229 (1951).

### 1. Versuchsaufbau

Die im Werk für Fernmeldetechnik Berlin-Oberschöneweide hergestellte Anlage (s. Abb. 1) zeigte folgenden Aufbau. Das Elektronenstrahlsystem und

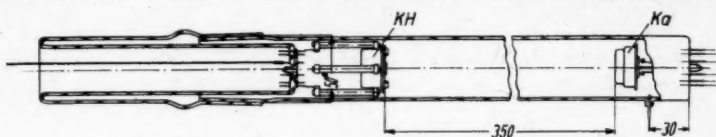


Abb. 1. Elektronenstrahlrohr. Links im Schliff der Kristallhalter KH, rechts die Kathode Ka

der Kristallhalter befanden sich in einem Schliffrohr, das während aller Messungen an einer Hg-Diffusionspumpe lag; der Gasdruck betrug nicht mehr als  $10^{-6}$  Torr. Der magnetisch fokussierte und gelenkte Strahl hatte auf dem Kristall etwa

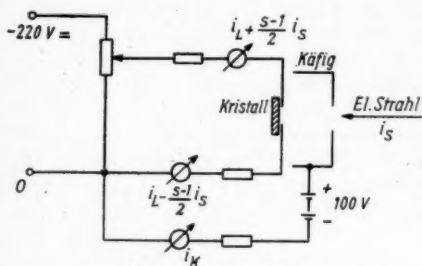


Abb. 2. Schaltung der Meßanlage

därelektronen abzusaugen. Dieser Käfigstrom wurde mit einem Langeschen Multiflexgalvanometer ( $2,3 \cdot 10^{-9}$  A pro Sktl.) gemessen.

### 2. Die Zellen

Als Untersuchungsobjekte wurden CdS-Kristalle verwendet, die teils von Frl. Alte im II. Phys. Institut hergestellt waren, teils von der Fa. Gaselan VEB uns freundlicherweise überlassen wurden. Untersucht wurden etwa 25 Zellen; die wenigsten von ihnen (von 16 Gaselankristallen nur 3) erfüllten die Bedingung, einen meßbar großen Effekt bei stabilen Verhältnissen zu zeigen. Die Dicke der Kristalle betrug  $20 \dots 40 \mu$ , ihre Breite  $1 \dots 2$  mm. Sie waren bis auf einen  $0,5 \dots 3$  mm breiten Querspalt mit Silber oder Gold überspiegelt.

### 3. Durchführung der Messungen

Es erwies sich bald als nötig, die Stromstärke des anregenden Strahles auf höchstens  $1 \mu A$  zu begrenzen; bei größeren Stromstärken färbten sich die zuvor gelbgelänzenden Kristalle stumpfbraun und zeigten unter dem Mikroskop einen Belag von winzigen Metallkügelchen. Möglicherweise handelte es sich hier um eine Cd-Ausscheidung. Auf jeden Fall fanden schnelle Veränderungen der Oberfläche statt, die den (auf die ersten 500 Atomschichten beschränkten) zu messenden Effekt beeinflussten. Es mußte darum das Arbeiten mit sehr kleinen Stromstärken in Kauf genommen werden.

Die Bestimmung des Zusammenhanges zwischen Leitfähigkeit und Energie der Primärelektronen wurde dadurch erschwert, daß der Effekt unter sonst gleichen Verhältnissen mit Annäherung des Strahles an eine Elektrode zunimmt. Man mußte also versuchen, immer wieder den gleichen Punkt auf dem Kristall zu treffen; da in zu großer Nähe der Elektroden Störungen auftraten, wurde der Strahl um einen bestimmten Bruchteil der Spaltbreite zur Mitte hin verschoben. Als notwendige Kontrolle gegen Randstörungen und Störungen durch etwa beschädigte Zellen lagen zwei Galvanometer im Kristallstromkreis. Sie mußten bei Änderung der Strahlstromstärke Gleichlauf zeigen, abgesehen von der kleinen Differenz, die der Ersatzstrom der Sekundäremission verursachte.

Die Strahlstromstärke  $i_s$  wurde bestimmt als Quotient des Käfigstromes  $i_k$  und des Sekundäremissionskoeffizienten  $s$  (Abb. 2). Letzterer wurde in grober Weise gemessen, indem der Kristall unter Bestrahlung von seinen Zuleitungen getrennt und  $i_k$  vor und nach dieser Trennung bestimmt wurde. Bei einem isolierten Bestrahlungsobjekt muß sich ja das Oberflächenpotential solange verschieben, bis  $s$  genau 1 ist — solange man mit nicht zu kleinen Strahlspannungen arbeitet. Dieses Verfahren,  $i_s$  zu bestimmen, wurde gewählt, weil zur Kontrolle etwaiger Aufladungen das Verhalten von  $s$  interessieren müßte. Die gefundenen Werte von  $s$  und die innerhalb der Meßgenauigkeit immer bestätigte Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes zeigen, daß Aufladungen kaum eine Rolle gespielt haben können.

Zur Ermöglichung reproduzierbarer Messungen mußte jeder Kristall zuvor 2 bis 3 Tage im Vakuum stehen.

Alle gemessenen Kristalle wurden auch auf Fluoreszenz, Dunkelstrom und eventuelle Gleichrichtereffekte untersucht; letzteres nur, um unerwünschte Besonderheiten auszuschließen. Die Untersuchung mit Hg-Lampe und UV-Filter ließ bei den zur endgültigen Messung geeigneten Kristallen in keinem Falle, Fluoreszenz erkennen. Die Dunkelleitfähigkeiten wurden teils mit dem empfindlichen Multiflexgalvanometer, teils mit Kondensatorentladung (Elektrometer) bestimmt. Diese Angaben sind nur bis auf einen Faktor 2 genau.

Der Anteil der Leitfähigkeit, den die Lichtemission der Kathode hervorrief, wurde vom Gesamteffekt subtrahiert. Dies erscheint gerechtfertigt, wenn man bedenkt, daß die durch gelbliches Licht („Ausläuferbereich“) angeregte Leitfähigkeit einen Volumeneffekt, dagegen die hier interessierende Erscheinung einen Oberflächeneffekt darstellt.

#### 4. Diskussion der Ergebnisse

##### a) Der Sekundäremissionskoeffizient

Abb. 3 zeigt die an drei Kristallen aufgenommenen Werte von  $s$  als Funktion der Strahlspannung  $U_s$ , wobei  $i_s$   $2 \dots 5 \cdot 10^{-8}$  A betrug. Eingetragen ist für jede Spannung der Mittelwert von 10 Messungen, die in einem Bereich  $\Delta s = \pm 0,15$  streuen, und zwar am stärksten bei Kristall F. Wie zu erwarten, ist im Bereich großer  $s$  deren Betrag um so größer, je unregelmäßiger die Oberfläche, d. h. je weniger die Primärelektronen genau senkrecht in den Kristall eintreten, während für große  $U_s$  diese Winkelabhängigkeit verschwindet. Ungeklärt ist, warum Kristall F bei 1500 V kein größeres  $s$  hat.

Der Wert von  $s$  war nicht von der Anregungsintensität abhängig, obwohl eine Vergrößerung von  $i_s$  im Prinzip die Dichte „freier“ Elektronen vergrößern

und damit infolge Plasmawechselwirkung  $s$  herabsetzen sollte. Hachenberg<sup>4)</sup> teilt hierzu mit, daß eine in KCl durch Belichtung erzeugte zusätzliche Dichte

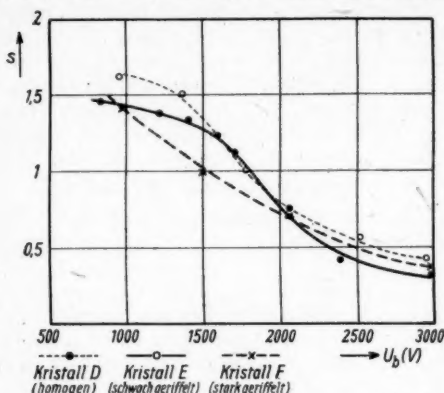


Abb. 3. Sekundäremission als Funktion der Beschleunigungsspannung

von  $5 \cdot 10^{17}$  „freien“ Elektronen pro  $\text{cm}^3$   $s$  um 5% herabgesetzt habe. Eine solche Dichte ist bei unseren Messungen selten erreicht worden; dies läßt sich abschätzen unter Benutzung des durch Faßbender und Lehmann<sup>5)</sup> bei Lichteinstrahlung im „Grundgittergebiet“ ermittelten Rekombinationskoeffizienten.

Ähnliche Werte von  $s$  ( $s_{\text{max}} = 1,5$ ) fand Salow<sup>6)</sup> an einer aufgedampften ZnS-Schicht. Archangelskaja und Bontsch-Burjewitsch<sup>3)</sup> geben an, daß der von ihnen bei  $U_b = 2000$  V bestrahlte CdS-Kristall gerade  $s = 1$  gehabt habe.

#### b) Zum Randeffect

Abb. 4 zeigt den typischen Verlauf der erregten Leitfähigkeit in Abhängigkeit vom Bestrahlungsort. Bei allen Kristallen, deren Spalt für dieses Abtastrverfahren breit genug war, und bei allen Strahlspannungen wurde dasselbe Verhalten festgestellt. Beim Umpolen des Kristalles waren die beiden Maxima vertauscht. Die Tatsache, daß das Maximum an der positiven Elektrode stets

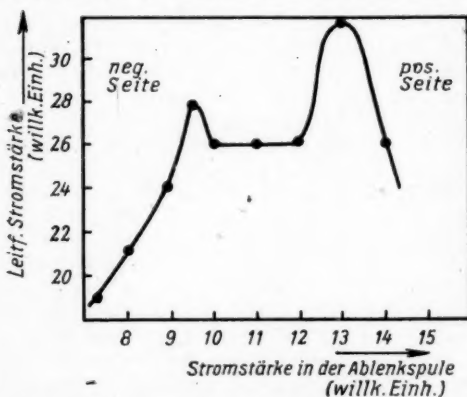


Abb. 4. Typische Abhängigkeit der Leitfähigkeit vom Bestrahlungsort auf dem Spalt. (Kristall D.) (Photoleitfähigkeit nicht subtrahiert)

größer als das auf der negativen Seite ist, wird zum Teil daraus erklärt, daß dort die wirksame Strahlspannung größer ist. Jedoch ergibt sich aus noch nicht veröffentlichten Messungen von Wendel an lichtbestrahlten CdS-Kristallen, sowie von Eckart an PbS-Kristallen, daß es sich hierbei um eine allgemeine, durch die Randschichten bedingte Gesetzmäßigkeit handelt.

Für die Untersuchung dieser örtlich verschiedenen Empfindlichkeit der Kristalle wurden Zellen mit besonders breiten Spalten (1 ... 3 mm)

<sup>4)</sup> O. Hachenberg, Ann. Physik (6) 2, 404 (1948).

<sup>5)</sup> J. Fassbender u. H. Lehmann, Ann. Physik (6) 6, 215 (1949).

<sup>6)</sup> H. Salow, Physik. Z. 41, 434 (1940).



hergestellt, nachdem Wendel im II. Phys. Inst. den analogen Effekt unter Lichtbestrahlung beobachtet hatte. In der Folge wurden nur solche Zellen durchgemessen, um definierte Verhältnisse zu schaffen; insbesondere, um zu prüfen, ob sich der Verlauf der Leitfähigkeit mit der Anregungsintensität durch Wechsel des Bestrahlungsortes änderte.

### c) Leitfähigkeit als Funktion der Strahlspannung

Die Abhängigkeit des Stromes  $i_L$  von der Beschleunigungsspannung  $U_b$  ist in Abb. 5 für vier verschiedene Zellen dargestellt, und zwar jeweils bei  $i_s = 0,1 \mu A$  gemessen; die Ordinate ist der durch Spaltlänge und Feldstärke dividierte Leitfähigkeitsstrom, also das Integral der Leitfähigkeit über die Schichttiefe. Der Einfluß der nur teilweisen „Ausleuchtung“ der Kristallspalte ist aus der Darstellung nicht eliminiert; er wird unten diskutiert.

Zur besseren Beurteilung der Kurven folgt zunächst eine Tabelle, in der für diese Zellen die Dunkelleitfähigkeit, die Photoleitfähigkeit infolge Beleuchtung durch die Kathode und einige weitere Eigenschaften angegeben sind;  $tg \alpha$  bedeutet den Exponenten der  $i_L$ - $i_s$ -Abhängigkeit. Als „Trägheit“ wird die Zeit bezeichnet, in der der Photostrom nach Abschalten der Belichtung auf  $< 5 \cdot 10^{-9}$  A abklingt.

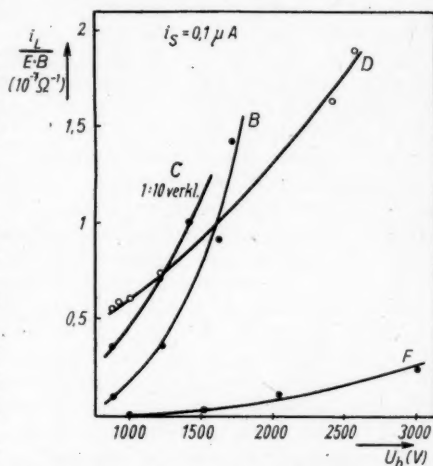


Abb. 5. Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Strahl-Beschleunigungsspannung für 4 verschiedene Kristalle (B, C, D, F)

Es fällt zweierlei auf. Einmal, daß Kristall F, der sich durch besonders geringe Leitfähigkeit von den übrigen unterscheidet, sich auch durch Inhomogenität

Tabelle 1

| Kristall<br>Herst.)    | Dunkel-<br>leitf.<br>( $\Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$ ) | Photoleitf.<br>durch<br>Kathoden-<br>licht<br>( $\Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$ ) | $tg \alpha$ | Elek-<br>troden <sup>7)</sup> | Struktur              | Trägheit    |
|------------------------|--|---|-------------|-------------------------------|-----------------------|-------------|
| B<br>(II. Phys. Inst.) | $3 \cdot 10^{-8}$                                      | $5 \cdot 10^{-5}$   | 0,61        | Ag                            | Flache<br>Zeichnung   | 2 Min.      |
| C<br>(II. Phys. Inst.) | $10^{-7}$  | $10^{-5}$   | 0,64        | Ag                            | Wenig kl.<br>Rillen   | 1 Min.      |
| D<br>(Gaselan)         | $3 \cdot 10^{-8}$                                      | $10^{-5}$   | 0,70        | Ag                            | Fast<br>homogen       | 1 Min.      |
| F<br>(Gaselan)         | $5 \cdot 10^{-10}$                                     | $10^{-6}$   | 0,88        | Au                            | Sehr dichte<br>Rillen | Einige Sek. |

<sup>7)</sup> Das Elektrodenmaterial hatte, wie Vergleichsmessungen zeigten, keinen Einfluß auf die Größenordnung der Leitfähigkeit.

und geringe Trägheit auszeichnet. Zweitens, daß die 3 übrigen Zellen, obwohl sonst in jeder Beziehung ähnlich, sich bei Elektronenbestrahlung um Größenordnungen verschieden verhalten.

Das Verhalten des Kristalles *F* liegt durchaus im Rahmen des Bildes, das uns das Bändermodell liefert. Sowohl die geringe Trägheit als auch die relativ kleine Photoleitfähigkeit deuten auf einen kräftigen Rekombinationsmechanismus, den man bei diesem, in seiner Struktur vom ungestörten Einkristall besonders stark abweichenden Stück auch am ehesten erwarten würde.

Betrachtet man nun die übrigen Kristalle, so hat man den Eindruck, als ob der hier untersuchte Effekt auf kaum merkliche Unterschiede im realen Gitterbau empfindlicher reagierte als der Photoeffekt. Legt man die Vorstellungen von Möglich und Rompe<sup>8)</sup> zugrunde, wonach dem Eintritt eines schnellen Primärelektrons nach außerordentlich kurzer Zeit das Auftreten einer entsprechenden Zahl sekundärer Elektronen an der unteren Kante des Leitfähigkeitsbandes folgt (wahrscheinlich weniger als  $10^{-10}$  sec), so kann man sich aber nicht vorstellen, in welcher Weise dieser Prozeß sich anders verhalten sollte als bei Lichtanregung. Die Vielfachstöße mit dem Gitter, die von den gleichen Autoren zur Klärung von Ausbeutefragen herangezogen wurden<sup>9) 10) 11)</sup>, und die, wenn überhaupt, dann hier wegen der großen Primärenergien eine Rolle spielen könnten, sollten jedenfalls auf die Elektronen des Leitungsbandes einwirken unabhängig davon, durch welchen Mechanismus sie in das Leitungsband gekommen sind. — Es ist also ungeklärt, wodurch hier die Größenanordnung der durch Elektronen angeregten Leitfähigkeit bestimmt wird. Dagegen läßt sich das Gesetz des Wachsens von  $i_L$  mit  $U_0$  in einen Zusammenhang mit der Spaltbreite bringen:

Nach Faßbender<sup>11)</sup> hängt bei Lichtanregung die Leitfähigkeit außer vom Rekombinationskoeffizienten von der Kristalldicke und dem Absorptionskoeffizienten ab, in der Weise, daß bei zu starker Absorption die Rekombinationen überhand nehmen, während bei zu geringer Absorption ein Teil der Energie den Kristall wieder verläßt. Es ist schwierig, die Faßbendersche Rechnung, die bei Annahme nichtlinearer Rekombination für einen günstigen Zwischenwert der Absorption ein Maximum der Leitfähigkeit ergibt, analog für die hier betrachtete Messung durchzuführen, weil die Elektronen ihre Richtung ändern. Pensak<sup>12)</sup> kombiniert, um die insgesamt in dünnen elektronenbestrahlten Schichten absorbierte Energie zu berechnen, das Whiddingtonsche Gesetz mit dem exponentiellen Abfall der Stromstärke, obwohl letzterer im wesentlichen nur die Verluste infolge Streuung beschreibt. Da es bei uns wegen der konzentrationsabhängigen Rekombination auf die echte Absorption in jeder differentiellen Schicht einzeln ankommt, müßte man die Streuung genau erfassen.

Eine grobe Näherung besteht darin, alle Elektronenbahnen als geradlinig und die Geschwindigkeiten dem Whiddingtonschen Gesetz unterworfen anzusehen. Eine analog wie bei Faßbender durchgeführte Rechnung ergibt dann als Zusammenhang zwischen Leitfähigkeitsstrom und Primärenergie

$$i_L \sim U_0^{1/2},$$

solange die Elektronen nicht den ganzen Kristall durchqueren. Ein Maximum

<sup>8)</sup> F. Möglich u. R. Rompe, Z. techn. Physik 21, 304 (1940).

<sup>9)</sup> F. Möglich u. R. Rompe, Physik. Z. 41, 236 (1940).

<sup>10)</sup> F. Möglich u. R. Rompe, Z. Physik 115, 707 (1940).

<sup>11)</sup> J. Faßbender, Ann. Physik (6) 5, 33 (1949).

<sup>12)</sup> L. Pensak, Physic. Rev. 75, 472 (1949).

von  $i_L$  tritt auf bei

$$U_b = \sqrt{k D},$$

wobei  $D$  die Kristalldicke und  $k$  die Konstante des Whiddingtonschen Gesetzes ist; sie beträgt<sup>13)</sup> für CdS:  $k = 2,5 \cdot 10^{11} \text{ V}^2 \text{ cm}^{-1}$ . Für die benutzten Kristalle ( $D \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$ ) folgt hieraus  $U_{\max} \approx 25 \text{ kV}$ . Da infolge der Streuung viele Schichten von demselben Elektron mehrmals durchquert werden, verschiebt sich der Schwerpunkt der absorbierten Energie mehr zur Eintrittsseite, so daß tatsächlich das Maximum der Leitfähigkeit erst bei wesentlich höheren Spannungen erreicht werden dürfte. — Derartige Maxima wurden z. B. von Pensak<sup>12)</sup> an Silizium-Filmen von  $1 \mu$  Dicke bei 10 kV gemessen.

In der eben angedeuteten Näherungsbetrachtung nimmt die in einer Schicht absorbierte Energie mit der Tiefe dieser Schicht zu. Eine Näherung, die in der entgegengesetzten Richtung von der Wirklichkeit abweicht, ist die Annahme einer völlig gleichmäßigen Verteilung der Energie bis zur Whiddingtonschen Grenztiefe. In diesem Fall erhält man

$$i_L \sim U_b^{1/4}.$$

Untersucht man nun allerdings die gemessenen  $U_b$ - $i_L$ -Kurven auf ihren Exponenten, so findet man, daß er zwischen 1 und 4 streut. — Die wesentliche Abweichung von der Faßbenderschen Theorie liegt hier nur darin, daß die Zellen nicht homogen angeregt werden, sondern nur in einem Teil des Spaltes. Ordnet man die Zellen nach ihren Spaltbreiten und schreibt daneben die Steigung der  $U_b$ - $i_L$ -Geraden in doppeltlogarithmischer Darstellung, so findet man (Tab. 2):

Bei schmalen Spalten steigt also die Leitfähigkeit viel schneller, als man erwartet. Daß dieser systematische Zusammenhang kein zufälliger, etwa durch individuelle Kristalleigenschaften begründeter ist, wird dadurch wahrscheinlich, daß die unten zu erörternden Intensitätsabhängigkeiten der vier Kristalle sich nicht wesentlich unterscheiden. Außerdem besteht keine systematische Beziehung zwischen den  $U_b$ - $i_L$ -Exponenten und den  $i_s$ - $i_L$ -Exponenten der einzelnen Kristalle. Die Tab. 2 legt die Deutung nahe, daß mit zunehmender Primärenergie auch die nicht mitbestrahlte Randzone des Spaltes zur Leitfähigkeit beizutragen beginnt; denn der Übergang von der Mitte zum Rand verläuft um so steiler, je schmaler der Spalt, wie aus den Messungen nach Art von Abb. 4 hervorging. Leider liegen hier noch keine Vergleichsmöglichkeiten mit den Verhältnissen bei Lichtanregung vor; man müßte dazu bei nur in der Spaltmitte bestrahlten Kristallen verschiedener Spaltbreiten das Leitfähigkeitsspektrum aufnehmen.

Tabelle 2

| Kristall | Spaltbreite (mm) | $U_b$ - $i_L$ -Exponent |
|----------|------------------|-------------------------|
| D        | 2,7              | 1,1                     |
| C        | 2,2              | 1,8                     |
| F        | 1,7              | 3,1                     |
| B        | 0,8              | 3,7                     |

#### d) Die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Strahlintensität

Diese Beziehung aufzudecken, war das wesentliche Ziel der ganzen Untersuchung. Das Ergebnis, für das Abb. 6 ein Beispiel gibt, kann ganz kurz und für sämtliche überhaupt untersuchten Kristalle gültig so ausgedrückt werden:

Die Leitfähigkeit hängt von der Bestrahlungsintensität genau wie bei Photoanregung durch eine einfache Potenzfunktion ab, deren Exponent im untersuchten

<sup>13)</sup> Nach freundl. Mitteilung von Herrn Dr. Eckart im Werk für Fernmeldetechnik Berlin-Oberschöneweide.

Bereich von  $i_s = 0,001 \dots 10 \mu\text{A}$  zwischen 0,5 und 1 liegt. Bei einem bestimmten Kristall ist der Exponent unabhängig von der Strahlspannung und von der Lage der bestrahlten Stelle auf dem Spalt. In Abb. 6 wurde z. B. bei 3000 V die Spaltmitte, bei den übrigen Spannungen eine Stelle in Randnähe bestrahlt.

Es muß bemerkt werden, daß bei Beschleunigungsspannungen unter 900 V einige Unstimmigkeiten auftraten, indem der Exponent dort etwas zuzunehmen schien. Jedoch liegt hier die Grenze, bei der die verwendeten Fokussierungsmittel zu versagen beginnen. Auch im Hinblick auf die verwendeten geringen

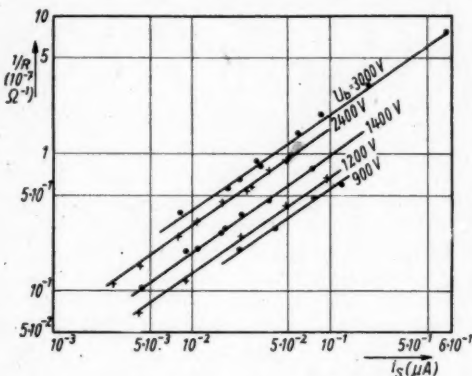


Abb. 6. Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Bestrahlungsintensität. (Kristall D.)

Feldstärke  $E = 186 \text{ Vcm}^{-1}$ . Bei  $U_0 = 3000 \text{ V}$  war Strahl auf Spaltmitte justiert, sonst in Randnähe.

Hier ist  $i_L \sim i_s^{0,7}$ , wie bei sämtlichen Kurven für diesen Kristall

Anzeichen, daß der Mechanismus nicht in allen drei Fällen derselbe sei; ein Vorgang also, der bestimmt wird durch die Zahl von Sekundärelektronen, die pro Sekunde in das  $L$ -Band gelangen, und durch die Wahrscheinlichkeit, mit der sie wieder rekombinieren.

Ein „Knick“ in der doppeltlogarithmischen  $i_L$ - $i_s$ -Kurve, wie ihn bei Lichtanregung Faßbender<sup>11)</sup>, Niekisch<sup>14)</sup> und Broser und Warminsky<sup>15)</sup> fanden, wurde nicht beobachtet.

#### e) Ausbeute der Leitfähigkeit

Um größenordnungsmäßig den „Wirkungsgrad“ der Elektronenanregung mit dem anderer Anregung zu vergleichen, führen wir eine Größe  $\eta$  durch folgende Definition ein.  $\eta$  soll dem Quotienten gleich sein aus der Zahl der als Träger von  $i_L$  pro Sekunde einen Querschnitt des Kristalls passierenden Elektronen (der Ersatzstrom der Sekundäremission darf vernachlässigt werden) durch die Zahl der theoretisch pro Sekunde erzeugten Elektronen, genommen bei der Feldstärke  $1 \text{ Vcm}^{-1}$ . Dabei ist die Zahl der theoretisch erzeugten Elektronen bei Licht-

<sup>14)</sup> E. A. Niekisch, Ann. Physik (6) 8, 291 (1951).

<sup>15)</sup> I. Broser u. R. Warminsky, Ann. Physik (6) 7, 289 (1950).

Stromstärken (man beachte die Abszissenskala in Abb. 6) erscheint es vernünftig, diese Abweichungen der Apparatur zuzuschreiben.

Die Konstanz und der Wert des Exponenten geben einen Hinweis darauf, daß es sich hier um einen der Photoanregung grundsätzlich gleichen Prozeß handelt. Es wurde von Faßbender und in letzter Zeit wieder von Niekisch<sup>14)</sup> bestätigt, daß sich bei einem bestimmten Kristall dieser Exponent im Falle der Grundgittereinstrahlung („Oberflächen-effekt“) kaum von dem bei langwelligerer Belichtung („Volumeneffekt“) unterscheidet. Es besteht kein

anregung gleich der Zahl der einfallenden Lichtquanten unter Berücksichtigung der Reflexion. Bei Elektronenanregung ist die Zahl der einfallenden Primärelektronen mit dem Faktor  $U_b/\Delta E$  zu multiplizieren, wobei  $\Delta E$  die Breite der verbotenen Energiezone bedeutet. Es gilt also

$$\eta = \frac{i_L}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot N_s \cdot E}$$

$i_L$  ist der Leitfähigkeitsstrom in A,  $N_s$  die theoretische Elektronenzahl pro sec,  $E$  die Feldstärke im Spalt in  $\text{Vcm}^{-1}$ .

$\eta$  wird berechnet aus eigenen Messungen, und zwar für den Kristall C, der bei weitem den größten Effekt zeigte, sowie zum Vergleich nach Angaben von Faßbender-Lehmann<sup>9)</sup> und Niekisch<sup>14)</sup> für Lichtanregung im Grundgittergebiet, wo absorptionsmäßig annähernd gleichartige Verhältnisse vorliegen. Weil  $i_L$  der Anregungsintensität nicht proportional ist, hängt  $\eta$  natürlich von der letzteren ab; deshalb wurden möglichst gleiche Werte von  $N_s$  gewählt.

Tabelle 3

| Kristall          |          | Zahl der einfallenden Primärelektronen bzw. Lichtquanten pro sec | $N_s$                | $i_L/E$<br>( $\text{cm}\Omega^{-1}$ ) | $\eta$<br>( $\text{cmV}^{-1}$ ) | Eindr.-Tiefe<br>(cm)             |
|-------------------|----------|--|----------------------|---------------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| C                 | (830 V)  | $5 \cdot 10^{10}$  | $1,75 \cdot 10^{13}$ | $4 \cdot 10^{-9}$                     | $1,5 \cdot 10^{-3}$             | $3 \cdot 10^{-6}$                |
| C                 | (1400 V) | $10^{11}$  | $5,8 \cdot 10^{13}$  | $6,4 \cdot 10^{-8}$                   | $7 \cdot 10^{-3}$               | $7 \cdot 10^{-6}$                |
| Faßbender-Lehmann | (4100 Å) | $3,8 \cdot 10^{11}$  | $3,8 \cdot 10^{11}$  | $2,1 \cdot 10^{-7}$                   | 3,5                             | $5 \cdot 10^{-5}$                |
| Niekisch          | (4360 Å) | $7 \cdot 10^{12}$  | $7,0 \cdot 10^{12}$  | $2 \cdot 10^{-7}$                     | 0,2                             | $5 \cdot 10^{-5}$ <sup>16)</sup> |

Man könnte daran denken, den viel kleineren Wert der Ausbeute bei Elektronenanregung durch die geringere Eindringtiefe und somit erhöhte Rekombinationszahl zu erklären, ferner auch durch die nicht gleichen Werte  $N_s$ . Aber Kristall C ist, wie gesagt, ein Einzelfall mit extrem hohem Effekt, während das für die Vergleichskristalle gefundene Ergebnis typisch zu sein scheint. Es ist also offensichtlich, daß die optimale Größenordnung von  $U_b/\Delta E$  Sekundärelektronen (es ist  $\Delta E = 2,4$  V) pro schnelles Primärelektron hier keineswegs erreicht wird. Wir haben scheinbar ein Analogon zu den von Möglich und Rompe<sup>8)</sup> besprochenen Anomalien der Ausbeute bei der Lumineszenzanregung von Kristallphosphoren durch Elektronen. Bei diesen Messungen betrug aber die Ausbeuteverminderung, die Möglich und Rompe durch Vielfachstoß erklärten, höchstens 90%. Es muß daran erinnert werden, daß bei Steigerung der Strahlstromstärke auf mehr als  $1 \mu\text{A}$  sich die Kristalle bald in ihrem Aussehen veränderten. Die pro Volumeneinheit umgesetzte Energie liegt in den Beispielen der Tabelle 3 für Elektronenanregung um 1...2 Größenordnungen höher als bei Lichtanregung, und sie wird nur zum kleinsten Teil in Anregungsenergie verwandelt. Man arbeitet also auch bei den hier benutzten kleinen Intensitäten an der Grenze des Bereiches, in dem man noch die Energien von Gitter und Elektronengas als unabhängig voneinander ansehen kann; an der Grenze des Bereiches also, in dem man mit dem Bändermodell arbeiten darf.

<sup>16)</sup> Lichteindringtiefe nach E. Mollwo, Reichsberichte für Physik 1, 1 (1944).



# T) Diskussion der Messungen von Eckart und von Bontsch-Burjewitsch und Archangelskaja

Eckart<sup>2)</sup> untersuchte bei den großen Strahlspannungen von 50...90 kV mit Strahlströmen von  $10^{-10}$ ... $10^{-8}$  A und Spaltbreiten von 1 mm die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der im Spalt herrschenden Feldstärke  $E$ . Die Werte von  $i_L$  lagen z. B. für  $E = 100 \text{ Vcm}^{-1}$  zwischen 20 und  $400 \mu\text{A}$ .

Bemerkenswert ist bei diesen Messungen, daß bei großen Feldstärken  $i_L$  schließlich langsamer als proportional zu  $E$  ansteigt; dieser Übergang vom Ohmschen Gesetz zu einem schwächeren Wachsen von  $i_L$  geschieht um so eher, je größer die Strahlstromstärke ist. Man erkennt hieraus, daß die oben besprochene Konstanz des  $i_L$ - $i_s$ -Exponenten bei hinreichend großen  $i_s$  oder hinreichend großen Feldstärken einmal ihre Grenze finden muß; dort muß der Exponent kleiner werden.

Archangelskaja und Bontsch-Burjewitsch<sup>3)</sup> berichten über das Abklingen der Leitfähigkeit eines impulsartig mit 2-kV-Elektronen bestrahlten CdS-Kristalles. Im Zusammenhang mit unseren Messungen ist interessant, daß aus einer ebenfalls mitgeteilten  $i_L$ - $i_s$ -Kurve sich ein Exponent  $\text{tg } \alpha = 0,65$  ergibt, in Übereinstimmung mit unseren Werten. Dabei zeigt aber dieser Kristall eine außerordentlich hohe Empfindlichkeit gegen Elektronenanregung. Aus der Darstellung folgt ein Widerstand von  $5 \Omega$  bei einer Strahlstromdichte von  $1 \mu\text{A cm}^{-2}$  und 20 V Spannung am Kristall. Daß es sich um ein Stück mit einer durch Cd-Überschuß erhöhten Leitfähigkeit handeln könnte, wird durch den ganz normalen Dunkelwiderstand  $> 5 \cdot 10^{10} \Omega$  ausgeschlossen. Leider machen die Autoren keine Angaben über die Abmessungen von Kristall und Spalt sowie über Lage und Größe der bestrahlten Fläche, so daß sich dieses unerwartete Ergebnis nicht näher diskutieren läßt.

Auch dieser Arbeit kann man Hinweise auf Umwandlungen im zu stark bestrahlten Kristall entnehmen. Die Autoren stellen nämlich zunächst fest, daß sich die Abklingzeit von  $i_L$  nahezu umgekehrt proportional  $\sqrt{i_s}$  ändert, was bei einem fast rein quadratischen Rekombinationsgesetz auch erwartet wird. Wenn aber der Kristall sehr lange mit größeren Intensitäten bestrahlt wird, z. B. mit  $15 \mu\text{A cm}^{-2}$ , bleibt die Abklingdauer bei Verminderung der Intensität konstant.

Die beschriebenen Untersuchungen wurden vom Herbst 1949 bis Herbst 1950 ausgeführt. Herrn Prof. Rompe möchte ich für Stellung dieser Aufgabe und wertvolle Diskussionen danken. Besonders bin ich auch Herrn Dr. Eckart im Werk für Fernmeldetechnik Berlin-Oberschöneweide (Oberspreewerk) zu Dank verpflichtet, ohne dessen fortgesetzte Unterstützung die Arbeit sich schwerlich hätte durchführen lassen. Auch für die Mitteilung seiner Meßergebnisse habe ich Herrn Dr. Eckart zu danken. \

Berlin, II. Physikalisches Institut der Humboldt-Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 19. Juli 1951.)



# Die Berechnung von Zustandssummen mittels Laplace-Transformationen

Von H. Koppe

## Inhaltsübersicht

Es wird ein Zusammenhang zwischen der Laplace-Transformierten der Zustandssumme und der Greenschen Funktion der Wellengleichung aufgewiesen, der es gestattet, das asymptotische Verhalten der thermodynamischen Funktionen und die chemischen Konstanten zu berechnen, ohne die Eigenwerte einzeln zu ermitteln.

1. In der Quantenstatistik tritt das Problem auf, die Zustandssumme

$$f(\tau) = \sum_n e^{-\tau \varepsilon_n} \quad (1)$$

zu summieren. Dabei ist  $\tau = (kT)^{-1}$  gesetzt, und die  $\varepsilon_n$  sind alle Eigenwerte einer Schrödingergleichung

$$H \psi_n(q) = \varepsilon_n \psi_n(q), \quad (2)$$

$q$  kann dabei für mehrere Koordinaten stehen; genau so bedeutet im folgenden  $dq$  das entsprechende Produkt der Differentiale.

In der klassischen Statistik hat man an Stelle von (1)

$$f_{\text{klass}}(\tau) = \iint e^{-\tau H(p,q)} dp dq \quad (3)$$

auszuwerten. Leider bedeutet der Übergang von (3) zu (1) mehr als den von einem Integral zu einer Summe: Während man in der klassischen Statistik  $f(\tau)$  wenigstens als Integral hinschreiben kann, muß man in der Quantenstatistik erst einmal das Eigenwertproblem (2) lösen und dann die Reihe (1) aufsummieren. Beide Probleme können schwierig sein; einen geschlossenen Ausdruck für  $f(\tau)$  erhält man bekanntlich nur für den harmonischen Oszillator.

Im folgenden soll eine Methode angegeben werden, nach der man  $f(\tau)$  etwas unmittelbarer bekommt, und zwar einmal als komplexes Integral, und zum anderen eine asymptotische Entwicklung für großes  $T$ , d. h. kleines  $\tau$ .

2. Aus Gl. (1) kann man sofort ablesen, daß  $f(\tau)$  für großes  $\tau$  exponentiell verschwindet. Für kleines  $\tau$  wird es unendlich. Wir nehmen an, daß sich eine ganze Zahl  $\mu$  so bestimmen läßt, daß

$$g_\mu(\tau) = \tau^\mu f(\tau)$$

eine Laplace-Transformierte  $G_\mu(s)$  hat. Für diese ergibt sich

$$G_\mu(s) = \Gamma(\mu + 1) \sum_n \frac{1}{(\varepsilon_n + s)^{\mu+1}}. \quad (4)$$

Für  $\mu$  gibt es immer eine untere Grenze  $\mu_0$ , so daß  $G_\mu(s)$  für  $\mu \geq \mu_0$  immer existiert, wie man aus (4) entnehmen kann. Wenn es gelingt,  $G_\mu(s)$  zu berechnen, dann

läßt sich daraus  $g_\mu(\tau)$  resp.  $f(\tau)$  mittels der komplexen Umkehrformel für die Laplacetransformation berechnen. Unmittelbarer kann man aus dem asymptotischen Verhalten von  $G_\mu(s)$  auf das Verhalten von  $f(\tau)$  für kleines  $\tau$  zurückschließen.

Wir betrachten die inhomogene Differentialgleichung

$$[H + s] \psi(q) = h(q). \quad (5)$$

Wenn  $-s$  nicht mit einem der Eigenwerte  $\varepsilon_n$  von (2) zusammenfällt, hat (5) eine eindeutige den Randbedingungen genügende Lösung. Diese läßt sich mittels der Greenschen Funktion  $G(q, q', s)$  darstellen:

$$\psi(q) = \int G(q, q'; s) h(q') dq'.$$

Indem man  $\psi$  in eine Reihe nach Eigenfunktionen entwickelt, erhält man rein formal die „Bilinearentwicklung“ von  $G(q, q'; s)$ :

$$G(q, q'; s) = \sum \frac{\psi_n^*(q') \psi_n(q)}{\varepsilon_n + s}. \quad (6)$$

Die Reihe rechts braucht nicht zu konvergieren, die Formel ist also nicht immer richtig. Die Greensche Funktion hat aber die angenehme Eigenschaft, daß sinnvolle Formeln, die sich aus (6) durch rein formale Operationen ableiten lassen, meist auch dann richtig sind, wenn (6) selbst nicht zutrifft. (Sie lassen sich anderweitig beweisen.) Durch Differentiation nach  $s$  erhält man aus (6)

$$(-)^{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^{\mu} G(q, q'; s) = \Gamma(\mu + 1) \sum \frac{\psi_n^*(q') \psi_n(q)}{(\varepsilon_n + s)^{\mu+1}}. \quad (7)$$

Die Summe rechts konvergiert für alle  $\mu$  oberhalb einer Schranke  $\mu_0$ . Um von (7) auf (4) zurückzukommen braucht man, da die  $\psi_n$  normiert sind, nur  $q = q'$  zu setzen, und über  $q$  zu integrieren:

$$G_\mu(s) = (-)^{\mu} \int \frac{\partial G^{\mu}(q, q, s)}{\partial s^{\mu}} dq. \quad (8)$$

Man kann somit  $G_\mu(s)$  berechnen, sobald man die Greensche Funktion kennt.  $g_\mu(\tau)$  bekommt man dann durch die Umkehrformel

$$g_\mu(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\tau s} G_\mu(s) ds. \quad (9)$$

Die Integration ist dabei an allen Singularitäten (die den Eigenwerten entsprechen) rechts vorbeizuführen.

Außerdem kann man, wie bereits erwähnt, die Entwicklung von  $G_\mu(\tau)$  für kleine  $\tau$  unmittelbar aus der asymptotischen Entwicklung von  $G_\mu(s)$  ablesen; es gilt die gliedweise Zuordnung:

$$s^{-n} \sim \frac{1}{\Gamma(n)} \tau^{n-1}. \quad (10)$$

3. Wir behandeln als erstes Beispiel einen Massenpunkt der Masse  $m$ , der sich auf einer Strecke der Länge  $A$  frei bewegen kann. Die Greensche Funktion ist dann definiert als die Lösung der Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 G}{dx^2} + s G = 0, \quad (11)$$

die den Randbedingungen  $G(0, x'; s) = G(A, x'; s) = 0$  genügt, und deren erste Ableitung an der Stelle  $x = x'$  einen Sprung von der Größe  $-2m/\hbar^2$  hat.

Man kann sich die Berechnung von  $G$  sehr vereinfachen, wenn man von vornherein den Satz benutzt, daß  $G$  in  $x$  und  $x'$  symmetrisch sein muß. Daraus ergibt sich, daß  $G$  die Gestalt

$$G(x, x'; s) = C(s) \operatorname{Ein} \sqrt{\frac{2ms}{\hbar^2}} x \operatorname{Ein} \sqrt{\frac{2ms}{\hbar^2}} (A - x') \quad \text{für } x < x'$$

$$= C(s) \operatorname{Ein} \sqrt{\frac{2ms}{\hbar^2}} x' \operatorname{Ein} \sqrt{\frac{2ms}{\hbar^2}} (A - x) \quad \text{für } x > x'$$

haben muß, wobei  $C$  nur von  $s$  abhängen kann.  $C$  bestimmt sich aus dem Sprung der Ableitung für  $x = x'$ . Man kann dabei für  $x'$  noch einen besonders bequemen

Wert nehmen, z. B.  $x' = \frac{A}{2}$ . Eine kurze Rechnung ergibt dann mit  $\kappa = \sqrt{2ms/\hbar^2}$

$$G(x, x'; s) = \frac{2m \operatorname{Coj} \kappa (A + |x - x'|) - \operatorname{Coj} \kappa (A - x - x')}{2\kappa \operatorname{Sin} \kappa A},$$

$G$  ist eine gerade Funktion von  $\kappa$ ; auf die Bestimmung des Vorzeichens der Wurzel kommt es demnach nicht an. In diesem Falle existiert bereits das Integral über  $G(x, x; s)$  und man erhält:

$$G_0(s) = \int_0^A G(x, x; s) dx = \frac{mA}{\hbar^2 \kappa} \operatorname{Coj} \kappa A - \frac{1}{2s}$$

$$\approx \frac{1}{2} \left( \frac{2mA^2}{\hbar^2 s} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2s}.$$

Benutzt man (10), so erhält man für die Zustandssumme die bekannte asymptotische Formel

$$f(T) \sim \left( \frac{mA^2 k}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{T} - \frac{1}{2}.$$

4. Etwas komplizierter werden die Rechnungen beim räumlichen Rotator. Der Hamiltonoperator ist hier

$$H = \frac{\hbar^2}{2J} \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}. \quad (13)$$

Die Greensche Funktion hängt von zwei Punkten  $q, q'$  auf der Kugeloberfläche ab, und zwar wegen der Kugelsymmetrie nur vom Winkel zwischen ihnen. Wenn man demnach für jede Lage  $q'$  als Achse eines Systems von Polarkoordinaten nimmt, dann ist  $G(q, q')$  eine Funktion von  $x = \cos \vartheta$  allein, die der Differentialgleichung

$$\frac{\hbar^2}{2J} \frac{d}{dx} (1 - x^2) \frac{dG}{dx} + sG = 0 \quad (14)$$

für alle Punkte mit Ausnahme von  $x = 0$  genügt. Für  $x = 0$  muß  $G$  logarithmisch unendlich werden, und zwar so, daß

$$G \rightarrow \frac{J}{\pi \hbar^2} \log \vartheta \quad (15)$$

gilt.

Die Lösung von (14), die nur eine logarithmische Singularität besitzt, ist  $P_\nu(x)$ , wobei sich  $\nu$  aus der Gleichung

$$\nu^2 + \nu + \frac{2J}{\hbar^2} s = 0 \quad (16)$$

bestimmt. Dabei ist es gleichgültig, welche der beiden Wurzeln dieser Gleichung man benutzt.

$P_\nu(x)$  wird (wenn  $\nu$  keine ganze Zahl ist) für  $x \rightarrow -1$ , d. h.  $\vartheta \rightarrow \pi$  unendlich wie<sup>1)</sup>.

$$P_\nu(x) \rightarrow \frac{2 \sin \pi \nu}{\pi} \log(\pi - \vartheta). \quad (17)$$

Die Singularität liegt also an der falschen Stelle. Da aber auch  $P_\nu(-x)$  eine Lösung von (14) ist, hat man unter Berücksichtigung von (15) und (17)

$$G(x; s) = \frac{J}{2\pi \hbar^2} \frac{\pi}{\sin \pi \nu} P_\nu(-x) \quad (18)$$

$$x = \cos \vartheta \cos \vartheta' - \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi').$$

Hier ist  $G(q, q; s) = G(1, s)$  unendlich; es liegt demnach der Fall vor, daß  $G_0$  nicht existiert. Wir berechnen deshalb  $G_1(s)$ . Es ist zunächst

$$\left. \frac{\partial G(x, s)}{\partial s} \right|_{x \rightarrow 1} = \frac{J}{2\pi \hbar^2} \frac{d\nu}{ds} \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ \frac{\pi}{\sin \pi \nu} P_\nu(-x) \right\}_{x=1}.$$

$\frac{d\nu}{ds}$  kann man aus (16) berechnen:

$$\frac{d\nu}{ds} = -\frac{2J}{\hbar^2} \frac{1}{2\nu + 1}.$$

Zur Berechnung der verbleibenden Ableitung benutzt man die Darstellung

$$\frac{\sin \pi \nu}{\nu} P_\nu(-x) = \int_0^\infty \frac{t^\nu}{\sqrt{1-2tx+t^2}} dt.$$

Dabei ist für die Wurzel der positive Zweig zu nehmen, und es muß zunächst  $-1 < \nu < 0$  gelten. Differenziert man nach  $\nu$  und geht nachträglich zur Grenze  $x = 1$  über, so ergibt sich

$$\left. \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ \frac{\sin \pi \nu}{\nu} P_\nu(-x) \right\} \right|_{x=1} = \int_0^\infty \frac{\log t \cdot t^\nu}{(1-t)} dt = \psi'(-\nu) - \psi'(1+\nu),$$

wobei  $\psi'(x) = d^2 \log \Gamma(x)/dx^2$  ist. Da  $\psi'(-\nu) - \psi'(1+\nu)$  für alle  $\nu$  definiert ist, gilt die Beziehung allgemein.

Wenn wir zu  $G_1(s)$  übergehen wollen, haben wir noch über die Kugeloberfläche zu integrieren. Da  $G_1(q, q; s)$  nicht von  $q$  abhängt, gibt das einen Faktor  $4\pi$  und wir erhalten:

$$G_1(s) = \left( \frac{2J}{\hbar^2} \right)^2 \frac{\psi'(1+\nu) - \psi'(-\nu)}{2\nu + 1}. \quad (19)$$

An (19) kann man zunächst ablesen, daß es auf die Wahl der Wurzel von (16) nicht ankommt. Ist nämlich  $\nu_1 = \nu$  die eine, dann ist die andere gegeben durch  $\nu_2 = -1 - \nu$ . Der Bruch in (19) hat demnach die Form

$$\frac{\psi'(-\nu_2) - \psi'(-\nu_1)}{\nu_1 - \nu_2} \quad (20)$$

und ist daher eine symmetrische Funktion der Wurzeln. Außerdem ist es interessant zu bemerken, daß bei der ganzen Rechnung die zugeordneten Kugelfunk-

<sup>1)</sup> Vgl. A. Sommerfeld, Theoretische Physik VI, Leipzig (1947), S. 159.

tionen, die ja bei der Berechnung der Eigenwerte eine entscheidende Rolle spielen, hier gar nicht in Erscheinung treten. Das zeigt, daß die Greensche Funktion etwas sehr viel Einfacheres ist, als spezielle Lösungen einer Differentialgleichung.

Um aus (19) wieder die asymptotische Entwicklung von  $f(\tau)$  zu bekommen, benutzen wir die Reihenentwicklung<sup>2)</sup>

$$\psi'(z) \approx \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} - \frac{1}{30z^5}. \quad (21)$$

Es sieht zunächst so aus, als bekäme man eine sehr komplizierte Funktion von  $s$ . Wenn man jedoch (20) für die einzelnen Potenzen getrennt ausgewertet, und  $\nu_1 + \nu_2 = -1$  resp.  $\nu_1 \nu_2 = 2J s / \hbar^2$  berücksichtigt, dann erhält man ohne Schwierigkeiten eine Entwicklung nach fallenden Potenzen von  $s$ :

$$G_1(s) = \left(\frac{2J}{\hbar^2}\right)^2 \left\{ s^{-1} + \frac{1}{3} \left(\frac{\hbar^2}{2J}\right) s^{-2} + \frac{2}{15} \left(\frac{\hbar^2}{2J}\right)^2 s^{-3} + 0(s^{-4}) \right\} \quad (22)$$

und daraus nach (10)

$$f(\tau) = \left(\frac{2J}{\hbar^2}\right)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\hbar^2 \tau}{2J}\right) + \frac{1}{15} \left(\frac{\hbar^2 \tau}{2J}\right)^2 + 0(\tau^3) \right\}.$$

Diese Beziehung ist schon früher von Mulholland<sup>3)</sup> auf anderem Wege abgeleitet worden.

5. Es gibt noch eine andere Möglichkeit, die Funktion  $G_\mu(s)$  zu berechnen. Sie führt in geeigneten Fällen mit noch weniger Aufwand zum Ziel, ist allerdings an Voraussetzungen geknüpft, die sich schwer allgemein beweisen lassen.

In zahlreichen Fällen erhält man die Eigenwerte als Wurzeln einer transzendenten Gleichung  $n(s) = 0$ . Es soll  $s$  wieder so gewählt werden, daß die Nullstellen von  $n(s)$  mit den mit  $-1$  multiplizierten Eigenwerten übereinstimmen. Es sei nun angenommen, daß  $n(s)$  eine ganze transzendente Funktion ist, für die eine Weierstraßsche Produktentwicklung existiert:

$$n(s) = e^{g(s)} \prod_n \left( 1 + \frac{s}{\varepsilon_n} \right) e^{-g_n(s)} \quad (23)$$

und daß darin  $g(s)$  und die  $g_n$  Polynome sind, deren Grad eine Grenze  $\mu_0$  nicht überschreitet.

Differenziert man  $\log n(s)$   $(\mu + 1)$ -mal nach  $s$ , so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{d^{\mu+1}}{ds^{\mu+1}} \log n(s) &= g^{(\mu+1)} + \sum \left\{ \frac{\Gamma(\mu+1)}{(\varepsilon_n + s)^{\mu+1}} - g_n^{(\mu+1)} \right\} \\ &= G_\mu(s) \quad \text{wenn } \mu \geq \mu_0. \end{aligned} \quad (24)$$

Die Schwierigkeit besteht zunächst darin, daß man  $\mu_0$  nicht kennt, und deshalb von vornherein nicht weiß, wie oft man zu differenzieren hat. Entscheiden läßt sich die Frage auf Grund der Tatsache, daß  $G_\mu$  die Laplace-Transformierte einer Funktion ist, und daß deshalb  $G_\mu(s) \rightarrow 0$  für  $s \rightarrow \infty$  gelten muß. Dazu ist offenbar notwendig, daß die Polynome durch Differenzieren abgebaut worden sind. Soweit man nur die asymptotische Form der Zustandssumme bestimmen will, kann man die Rechnung aber durch folgendes Rezept vereinfachen: Man bestimmt die

<sup>2)</sup> Vgl. Jahnke-Emde, Funktionentafeln, 4. Aufl., S. 20. Die Formel enthält einen Druckfehler! (Vorzeichen vor dem zweiten Glied).

<sup>3)</sup> Mulholland, Proc. Cambridge philos. Soc. 24, 280 (1928).

asymptotische Entwicklung von  $d \log n(s)/ds$ , streicht darin alle ganzen positiven Potenzen von  $s$  (die durch Differenzieren zum Verschwinden gebracht werden können) und bestimmt daraus  $f(\tau)$  durch formale Anwendung der Formeln (10).

Als Anwendung greifen wir wieder auf das bereits behandelte Beispiel zurück. Wir bestimmen zunächst eine Lösung der Gl. (11), die der Randbedingung  $y(0, s) = 0$  gehorcht, und die wir etwa noch durch die Forderung  $y'(0, s) = 1$  normieren können. Die gesuchte Lösung ist  $y(x, s) = \sin x \sqrt{\frac{2ms}{\hbar^2}} / \sqrt{\frac{2ms}{\hbar^2}}$  und die Bedingung für die Eigenwerte ist die Erfüllung der zweiten Randbedingung  $y(A, s) = 0$ :

$$n(s) = \frac{\sin \kappa A}{\kappa}.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{d \log n(s)}{ds} = \frac{d\kappa}{ds} \frac{d \log n}{d\kappa} = \frac{1}{2} \left( \frac{2ms}{\hbar^2} \right)^{1/2} \cot \kappa A - \frac{1}{2s}$$

in Übereinstimmung mit (12).

6. Die hier entwickelte Methode fließt aus der formalen Analogie zwischen Wellenmechanik und Wärmeleitung. Dieser Zusammenhang ist bereits früher von Bloch<sup>4)</sup> und Kirkwood<sup>5)</sup> benutzt worden, um eine Entwicklung der Zustandssumme nach Potenzen von  $\hbar$  zu erhalten. Damit erhält man grundsätzlich auch wieder Näherungsformeln für hohe Temperaturen. Die hier dargestellte Entwicklung nach fallenden Potenzen von  $T$  hat dem gegenüber den Vorteil, daß man den genauen Wert der chemischen Konstanten bekommt. Dafür ist sie allerdings wohl nur für Probleme mit wenigen Freiheitsgraden anwendbar. Das liegt daran, daß sich die Möglichkeit einer Separation der Variablen nicht in einfacher Weise an der Greenschen Funktion ausdrückt.

Es bestand ursprünglich die Hoffnung, Aussagen über die Zustandssumme aus den Ausdrücken

$$G_\mu = \sum \frac{1}{\epsilon^{\mu+1}} \quad (25)$$

zu erhalten, die besonders einfach zu berechnen sind.

Da  $G_\mu(0) = \Gamma(\mu + 1) G_\mu$ , ist durch die Gesamtheit aller  $G_\mu$  ein Funktionselement von  $G(s)$  und damit grundsätzlich auch das asymptotische Verhalten gegeben. Es scheint aber nicht möglich zu sein, aus diesem allgemeinen funktionentheoretischen Existenzsatz eine brauchbare Rechenvorschrift zu erhalten.

<sup>4)</sup> Bloch, Z. Physik. **74**, 295 (1932).

<sup>5)</sup> Kirkwood, Physic. Rev. **44**, 31 (1933).

Göttingen, Max-Planck-Institut für Physik.

(Bei der Redaktion eingegangen am 25. Oktober 1951.)

#### Verantwortlich

für die Schriftleitung: Prof. Dr. Friedrich Möglich, Berlin-Buch, Lindener Weg 74;  
für den Anzeigenteil: Ernst Wöllnitz (Arbeitsgemeinschaft medizinischer Verlage G.m.b.H.),  
Berlin C 2, Neue Grünstraße 18, Fernruf: 52 12 97. Z. Z. gilt Anzeigenpreisliste Nr. 2  
Verlag: Johann Ambrosius Barth, Leipzig C 1, Salomonstr. 18B, Fernruf: 63 105, 63 781  
Printed in Germany

Lizenznummer 285/446

Druck: Paul Dünhaupt, Köthen (IV/5/1) L 107/51



## Kristallchemie und Kristallphysik metallischer Werkstoffe

Eine Einführung für Ingenieure

Von Prof. Dr. FRANZ HALLA, Brüssel

2., völlig umgearbeitete Auflage

XVI, 638 S. m. 346 Abb. im Text u. 1 Tafel. 1951. Gr. 8°.

DM 45.—, geb. DM 46.50

In der neuen Auflage haben fast alle Abschnitte größere Ergänzungen erfahren, z. B. der über Atomradien. Neu ist das Kapitel über die Kossel-Stranskische Theorie der Kristallbildung. Im Kapitel „Mischkristalle“ sind die neueren Forschungen von Hume-Rothery und seiner Schule, die Rolle der Valenzelektronenkonzentration und der verschiedenen Einzelfaktoren berücksichtigt. Der Abschnitt „Deformation“ ist im Hinblick auf die Rolle der Versetzungen und auch nach der technischen Seite hin erweitert worden; der Korrosion wurde ein eigener Abschnitt gewidmet und der kristallchemische Teil wurde durch Aufnahme der neueren Ergebnisse erweitert. Gleiches gilt für die Einlagerungsgitter und die Gase in Metallen. Im Kapitel „Reaktionen in festen Metallen“ wurde eine schärfere Gliederung durchgeführt und vor allem die Aushärtung ausführlicher behandelt.

## Die elektroakustischen Wandler

Von Dr. Dr. HEINRICH HECHT, Kiel

2., erweiterte Auflage. XII, 221 S. m. 44 Abb. i. T. 1951. Gr. 8°. DM 19.50

Physikalische Zeitschrift: Dem Elektroakustiker ist hier ein Werk über die Grundgesetze und Regeln der Wandler in die Hand gegeben worden, das er immer wieder bei seinen Forschungen gern zu Rate ziehen wird. Für den Studenten ist es zur Einarbeitung in das Gebiet ebenso geeignet wie für den Physiker und Ingenieur der Praxis, der sich bei der Planung und Entwicklung eines Gerätes für die eine oder andere Wandlerart entscheiden muß. Besonders warm zu empfehlen ist es aber dem Praktiker, der die Entwicklung von Lautsprecher und Mikrophon oft mit krasser Empirie durchgeführt hat; hier ist ihm Gelegenheit geboten, auch ohne große mathematische Vorkenntnisse die grundsätzlichen Möglichkeiten und Grenzen seiner Geräte bezüglich Wirkungsgrad, Empfindlichkeit, Frequenzgang usw. kennenzulernen.

J. Zunino

## Schaltschemata und Differentialgleichungen elektrischer und mechanischer Schwingungsgebilde

Von Dr. Dr. HEINRICH HECHT, Kiel

2., erweit. Auflage, VII, 170 Seiten mit 48 Abb. i. Text. 1950. Gr. 8°. DM 16.80

Elektrotechnik und Maschinenbau: Das überaus klar geschriebene Buch beginnt mit der Besprechung der einfachsten Fälle und wendet sich dann immer schwierigeren Aufgaben zu, so daß es möglich ist, sich auch mit verhältnismäßig geringen Vorkenntnissen auf dieses Gebiet gut einzuarbeiten. Das Buch stellt eine willkommene Bereicherung der bereits sehr umfangreichen Literatur auf dem Gebiete der Schwingungslehre dar und kann dem Ingenieur und Physiker auf das beste empfohlen werden.

Die Ladenpreise entsprechen den Bestimmungen der Preisordnung Nr. 234 vom 15. Juli 1949

JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

## MEDICO-KOLORIMETER

Das neue Universalgerät für alle kolorimetrischen und Trübungsmessungen



Rasche und völlig objektive Arbeitsweise. Unabhängig von der Sehtüchtigkeit des Beobachters, kleiner Flüssigkeitsbedarf (2 ccm), auswechselbare FarbfILTER in Revolverblende, stabiler Netzanschluß, günstiger Preis DM 300.—

Verlangen Sie ausführliche Druckschriften!  
Spezialfabrik für lichtelektr. Zellen u. Apparate

**DR. B. LANGE**

Berlin-Zehlendorf • Hermannstraße 14-16  
Telefon Nr. 84 81 22 • Telegr.-Adr.: Photozelle



POLARISATIONS-APPARATE  
SPEKTROSKOPE, SPEKTROGRAPHEN  
MONOCHROMATOREN, REFRAKTO-METER  
SPEKTRALPHOTOMETER, KOLORIMETER  
PHOTOMETER, SCHWÄRZUNGSMES-  
SER  
PYROMETER  
SPEKTROMETER, OPTISCHE PRÜFGERÄTE  
ANOMALOSKOPE, FARBENMISCHAPPARATE

**SCHMIDT-HAENSCH**

Feinmechanik und Optik  
Berlin-Schöneberg  
Naumannstr. 33  
Ruf 7116 25

VAKUUM-  
PUMPEN  
für Laborbedarf



Chemisch-technische  
PRÄZISIONS-  
WAAGEN

**MECHANIK**

Vereinigung vollqualifizierter Betriebe der feinstmechanischen Industrie  
LABOR-PRÜFGERÄTEBAU-CHEMNITZ, Adorfer Str. 20

**PHOTOZELLEN**  
für jeden Zweck

für Forschung  
für Technik  
für Tonfilm

Sonderliste Nr. 504  
Sonderliste Nr. 503  
Sonderliste Nr. 501

DEUTSCHE GLÜHLAMPEN-GESELLSCHAFT  
**PRESSLER-ZELLEN**  
LEIPZIG 91

## Temperaturmessung

Von Prof. Dr. Fritz Henning, Bremen

VI, 294 Seiten mit 80 Abbildungen im Text. 1951. Gr. 8°. DM 25.80, geb. DM 26.80  
(Der Ladenpreis entspricht den Bestimmungen der Preisordnung Nr. 234 v. 15. 7. 1949)

In dem Buch sind die vom Verfasser auf seinem Hauptarbeitsgebiet während einer 44-jährigen Tätigkeit gesammelten Erfahrungen wiedergegeben. Die Darstellung ist durch die Forschungsergebnisse der Fachgenossen des In- und Auslandes ergänzt worden und gibt den augenblicklichen Stand aller theoretischen und praktischen Erkenntnisse auf dem Gebiet der Temperaturmessung von der Nähe des absoluten Nullpunktes bis zur Temperatur im Innern der Sterne wieder.

**JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG**

R  
ngen  
von  
iarf  
bili-



Postfach  
111. 88

s  
01  
PT  
LER  
C1

N

00  
0)  
or  
th  
nd  
af  
ir

7